

SÉRIE A, N° 1264

N° D'ORDRE :

2130

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

PAR

E. DOUCET

1^{re} THÈSE. — PREMIÈRE CONTRIBUTION A UNE ÉTUDE HYDRODYNAMIQUE DES POMPES CENTRIFUGES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **21 JUIN** 1930, devant la Commission d'Examen

MM. KOENIGS *Président*

VILLAT. }
VILLEY. } *Examineurs.*

PARIS

IMPRIMERIE LES PRESSES MODERNES

45, rue de Maubeuge

—
1930

SÉRIE A, N° 1264

N° D'ORDRE :

2130

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

PAR

E. DOUCET

1^{re} THÈSE. — PREMIÈRE CONTRIBUTION A UNE ÉTUDE HYDRODYNAMIQUE DES POMPES CENTRIFUGES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1930, devant la Commission d'Examen

MM. KOENIGS . . .	<i>Président</i>
VILLAT.	} <i>Examineurs</i>
VILLEY.	

PARIS
IMPRIMERIE LES PRESSES MODERNES
45, rue de Maubeuge

—
1930

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Doyens honoraires P. APPELL, M. MOLLIARD.

Prof. honoraires }
A. JOANNIS.
H. LE CHATELIER.
H. LEBESGUE.
A. FERNBACH.
A. LEDUC.
E. HÉROUARD.



Emile PICARD . . . Analyse supérieure et algèbre supérieure.
G. KÖNIGS Mécanique physique et expérimentale.
E. GOURSAT Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET Electrotechnique générale.
F. WALLERANT . . . Minéralogie
P. PAINLEVÉ Mécanique analytique et mécanique céleste.
Gabriel BERTRAND . . Chimie biologique.
M^{me} P. CURIE Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY Zoologie (Evolution des êtres organisés).
G. URBAIN Chimie générale.
Emile BOREL Calcul des probabilités et Physique mathém.
L. MARCHIS Aviation.
Jean PERRIN Chimie physique.
Remy PERRIER . . . Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM Physique.
M. MOLLIARD Physiologie végétale.
E. CARTAN Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE Physiologie générale.
E. VESSIOT Théorie des fonctions et théories des trans-
formations.

Professeurs . . .
A. COTTON Physique générale.
J. DRACH Application de l'analyse à la géométrie.
Charles FABRY . . . Physique.
Charles PÉREZ . . . Zoologie.
Léon BERTRAND . . . Géologie structurale et géologie appliquée.
R. LESPIEAU Théories chimiques.
E. RABAUD Biologie expérimentale.
P. PORTIER Physiologie comparée.
E. BLAISE Chimie organique.
P.-A. DANGEARD . . . Botanique.
Paul MONTEL Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT . . . Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSQ Biologie maritime.
G. JULIA Mathématiques générales.
A. MAILHE Etude des combustibles.
L. LUTAUD Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH . . . Physique théorique et physique céleste.
Henri VILLAT . . . Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB Géologie.
P. PASCAL Chimie minérale.
Léon BRILLOUIN . . . Théories physiques.
V. AUGER Chimie appliquée.
E. ESCLANGON . . . Astronomie.

E. PÉCHARD . . . Chimie (Enseig ^t P. C. N.).	L. JOLEAUD . . . Paléontologie.
M. GUICHARD . . Chimie minérale.	M. JAVILLIER . . Chimie biologique.
A. GUILLET . . . Physique	A. DUFOUR . . . Physique (P. C. N.).
C. MAUGUIN . . . Minéralogie.	F. PICARD . . . Zoologie (Evolution des êtres organisés).
L. BLARINGHEM . Botanique.	ROBERT-LÉVY . . Zoologie.
A. MICHEL-LÉVY . Pétrographie.	L. DUNOYER . . Optique appliquée.
A. DERREIMS . . Géologie	A. GUILLIERMOND . Botanique (P. C. N.).
A. DENJOY . . . Calcul différ. et intégral.	A. DEBIERNE . . Radioactivité.
H. BÉNAUD . . . Physique (P. C. N.).	M. FRÉCHET . . Calcul des Probabilités et Physique mathémat.
E. DARMOIS . . . Physique.	
G. BRCHAT . . . Physique.	
H. MOUTON . . . Chimie physique.	

Secrétaire A. PACAUD.

Ce travail a été exécuté sous la haute direction de Monsieur Kœnigs, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences.

Monsieur Villat, Correspondant de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences, a bien voulu s'intéresser à la partie mathématique. Monsieur Auclair, Correspondant de l'Institut, Président du Comité de Mécanique de l'Office National des Inventions, a dirigé tout le travail technique de calculs numériques et de vérifications expérimentales.

Je les prie de bien vouloir trouver ici l'assurance de toute ma reconnaissance pour les conseils qu'ils m'ont prodigués et l'aide qu'ils m'ont apportée si souvent.

Première Contribution à une Étude Hydrodynamique des Pompes centrifuges

Nous nous proposons d'appliquer les Equations générales de l'Hydrodynamique dites de Navier et contenant le coefficient de viscosité du liquide considéré à l'étude du mouvement de ce liquide dans les pompes centrifuges dont le distributeur et le diffuseur sont dépourvues d'aubes fixes.

Ces équations ont été intégrées par des solutions particulières, de manière à satisfaire aux conditions, aux limites. Les calculs ont été poussés jusqu'aux calculs numériques. Nous avons considéré, pour exécuter ceux-ci, une pompe ayant sensiblement les dimensions et les profils de la pompe mise à notre disposition au Laboratoire de Mécanique Physique de la Sorbonne.

Nous avons pu donner une explication satisfaisante de deux phénomènes suivants constatés jusqu'à ce jour et restés inexplicables.

La prérotation du liquide à l'entrée de la pompe centrifuge.

La différence entre la puissance calculée et la puissance réalisée.

Faite pour expliquer l'ensemble du mouvement, cette étude n'a pas la prétention d'épuiser la question de la construction des pompes centrifuges et de déterminer les formes les meilleures à donner aux pompes centrifuges. Elle peut cependant donner aux constructeurs une méthode de vérification intéressante.

Les diverses parties de cette étude ont été distribués dans les chapitres suivants :

I. — Généralités.

II. — Etablissement des Equations générales.

III. — Calculs numériques et Vérifications Expérimentales.

IV. — Conclusion.

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

Nous étudierons, dans ce chapitre, les questions suivantes :

- a) Exposé sommaire de l'histoire des pompes centrifuges.
- b) Méthodes et Hypothèses.
- c) Valeur du coefficient de viscosité à introduire dans les calculs.

a) Exposé sommaire de l'histoire des Pompes Centrifuges. —

Notons tout d'abord très sommairement l'histoire même des pompes centrifuges. Les premières pompes donnant des résultats industriels notables furent exposées à Londres en 1851. L'exposition de Paris de 1855 vit un certain nombre de ces engins alors nouveaux, en particulier les pompes d'Appold et Gwyne. Celle de 1867 vit pour la première fois une série complète de pompes centrifuges dues d'abord à Noel et Dumont, puis ensuite à Dumont seul.

A partir de cette date les pompes centrifuges se sont développées et de multiples modèles ont été essayés. L'apparition du moteur électrique dont les vitesses de rotation sont de même ordre que celle des pompes centrifuges a été une des causes prépondérantes de l'extension de ce type de pompes.

En 1892 paraissent les travaux de M. Rateau qui permirent

la réalisation de toute une série de perfectionnements notables, en particulier la mise au point de pompes multicellulaires.

Les progrès se sont accusés depuis le début du siècle et peu à peu les types de pompe s'unifient de plus en plus. Les pompes centrifuges, en particulier, se sont simplifiées. Les directrices du distributeur, celles du diffuseur, ont disparu peu à peu et à l'heure actuelle les pompes usuelles ont sensiblement des formes semblables.

Parallèlement à cette évolution des pompes centrifuges vers un type sensiblement uniforme se poursuivait l'élaboration de la théorie de ces engins.

Dans la première partie du xix^e siècle s'est mise au point l'utilisation des idées émises par Euler au milieu du $xviii^e$ siècle. Celui-ci avait fait paraître les 2 publications suivantes : en 1750-1751 : *Recherches sur l'effet d'une machine hydraulique. Application à la machine hydraulique de Segnier*. En 1754, *Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la rotation de l'eau*. Euler mit en évidence la formule fondamentale donnant le moment par rapport à l'axe de rotation des efforts exercés par l'eau sur les parois. Cette proposition d'Euler était d'ailleurs restée complètement ignorée jusqu'à la fin du premier quart du xix^e siècle. Ce ne fut qu'à l'apparition de la turbine Fourneyron que ces idées furent reprises.

Les théories classiques furent élaborées dans le 2^e quart du xix^e siècle par des publications assez nombreuses. Parmi celles-ci, trois ouvrages nous ont paru être les ouvrages fondamentaux.

Poncelet en 1838 publia une étude sur *La théorie mécanique de la Turbine de Fourneyron*, C. R., t. VII, Juillet Décembre 1838. Il y établit la formule donnant le travail.

Redtenbacher, un auteur allemand, publia à Mannheim en 1854 une *Théorie et Construction des Turbines et Ventilateurs*

qui semble avoir une importance notable dans un pays de langue allemande et qui a introduit certains coefficient dits « Coefficients de résistance ».

Combes, enfin, publia des *Recherches théoriques et expérimentales sur les roues à réaction et à tuyaux*. Il se réfère aux travaux d'Euler et introduit la condition de l'entrée sans chocs de l'eau.

Vers la fin du ^{xx}e siècle un ensemble de travaux importants fut publié par M. Rateau. Notons en particulier un article *Considération sur les Turbo-Machines*, publiée en 1892 dans le Bulletin de la Société de l'Industrie minière de St-Etienne. Le résultat de ces travaux fut l'introduction de deux caractéristiques principales dans la construction des Pompes Centrifuges. La forme des ailes préconisée fut celle d'une surface dite « conicyclide » obtenue par déplacement d'un arc de cercle s'appuyant sur l'axe de rotation et sur une autre courbe, et dont le plan reste parallèle à lui-même. Cette forme semble s'être limitée aux pompes du type « Rateau ». Le diffuseur indiqué comme devant être formé d'une « fente diffuseur » prolongement du Rotor et d'une volute, s'est, au contraire imposé à la pratique et la plupart des pompes actuelles ont des diffuseurs analogues à ceux de M. Rateau a préconisé. En dehors de ces deux modifications M. Rateau a mis en évidence, l'application du principe de similitude à l'étude des pompes centrifuges et en a tiré toute une série de conclusions précieuses pour l'établissement des projets.

Depuis ces études, divers ouvrages ont traité de la théorie et de la construction des pompes centrifuges. Notons successivement :

En 1899, *Théorie des Turbines*, par Zeuner.

En 1913, *Nouvelle Théorie et Calcul des Roues-Turbines*, par le docteur H. Lorenz.

En 1926, *Théorie et Construction des Turbo-Machines*, par M. Hanocq, professeur à l'Université de Liège. Dans cet ouvrage se trouvent non seulement l'exposé des théories actuelles, mais encore les résultats de nombreuses expériences.

En 1926, *Turbines hydrauliques*, de MM. Rateau, Eydoux et Gariel.

En dehors de ces ouvrages nous avons utilisé de nombreux articles dus à M. Bergeron et publiés dans la Revue de Mécanique.

Aucun de ces auteurs n'a essayé de relier dans leur ensemble, les phénomènes dont les pompes centrifuges sont le siège aux équations générales de l'Hydrodynamique des fluides visqueux, données par Navier en 1831.

L'étude actuelle a pour but d'indiquer les distributions de vitesse satisfaisant d'une part aux équations générales de l'Hydrodynamique des fluides visqueux et susceptibles de représenter dans les pompes actuelles la répartition des vitesses moyennes.

b) **Méthode et Hypothèse.** — La méthode que nous allons appliquer est la suivante :

Nous rapporterons le mouvement à 3 axes rectangulaires Ox, y, z , Oz étant vertical, liés au rotor et entraînés par lui avec une vitesse angulaire constante ω . Les équations du mouvement seront obtenus à partir de 3 axes rectangulaires $Oxyz$ fixes et des équations de Navier.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho} \Delta u - (u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) - \frac{\partial u}{\partial t} - X \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho} \Delta v - (u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}) - \frac{\partial v}{\partial t} - Y \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\eta}{\rho} \Delta w - (u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}) - \frac{\partial w}{\partial t} - Z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Les constantes introduites dans ces équations sont :

ρ , poids de l'unité de volume du liquide.

η , coefficient de viscosité du liquide considéré.

Les variables sont :

x, y, z , coordonnées du point considéré.

t , le temps.

Les fonctions données sont :

X, Y, Z , composantes de la force extérieure agissant sur le point considéré. Nous supposons ici

$$X = Y = Z = 0$$

Les quatre fonctions inconnues définies par ces quatre équations sont : u, v, w , composantes de la vitesse suivant les axes.

p , la pression en un point du liquide, à l'instant t .

L'application de ces équations à l'étude d'un tel problème soulève deux questions importantes.

Tout d'abord *l'emploi de ces équations* est-il légitime et peut-on les appliquer à l'étude d'une question d'hydraulique ? Une réponse affirmative est certaine après les travaux de MM. Boussinesq, M. Levy, Osborne, Raynold et Brillouin. Il convient cependant de préciser que la vitesse introduite dans les calculs est bien la vitesse moyenne et non la vitesse instantanée. De plus, le coefficient de viscosité à introduire n'est pas le coefficient de viscosité ε des équations générales, coefficient de Poise-nike, mais un coefficient η que nous estimerons plus loin et dont la valeur tient compte de l'agitation moyenne au point considéré.

Ensuite quelles sont les *conditions aux limites* à introduire ? Etant donné que le liquide est un liquide visqueux la vitesse à la paroi devrait être nulle. Mais cette vitesse varie très rapidement au contact de la paroi et nous supposons, ce qui est admis dans les ouvrages d'hydraulique, que les conditions à la paroi

sont satisfaites lorsque la vitesse de la particule en contact avec la paroi est dans le plan tangent à celle-ci. Une étude plus détaillée des phénomènes conduirait à introduire une fonction dissipatrice à la paroi, représentant la dérivée par rapport au temps de l'énergie perdue au contact de cette paroi.

En résumé les hypothèses que nous ferons sont les suivantes :

Le fluide considéré n'est pas pesant.

Les équations de l'hydrodynamique s'appliquent et le fluide ne présente aucune discontinuité.

Les conditions aux limites sont satisfaites si la vitesse est contenue dans le plan tangent à la surface terminale.

La solution des équations de l'hydrodynamique est unique.

c) **Coefficient de viscosité.** — Dans les équations I figure le coefficient de viscosité η . Il convient de remarquer que ce coefficient de viscosité s'applique à des vitesses moyennes. Il sera donc différent du coefficient de viscosité de Poiseuille mesuré à l'aide de tuyaux capillaires.

De plus, il convient de remarquer que ce coefficient de viscosité moyen η dépend de la forme de la section, de son étendue en même temps que du liquide étudié. Mais nous nous contenterons dans les calculs numériques de supposer que le coefficient η est un coefficient constant. Nous prendrons, dans le système d'unités industrielles, mètre et kilogramme, que nous utiliserons par la suite, la valeur

$$\eta = 0,001.$$

Il faut d'ailleurs remarquer que les conditions aux limites, fournies par l'expérience ne tiennent compte en quelque sorte du coefficient de viscosité du liquide étudié. Cette remarque est utilisée en particulier pour l'étude d'une solution annulant les coefficients de ce coefficient de viscosité.

CHAPITRE II

ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES

Les équations dont nous partirons sont les équations générales de l'hydrodynamique des fluides visqueux, rapportées à 3 axes fixes $Oxyz$ et qui sont, en posant, pour simplifier les écritures

$$\begin{cases} P = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ Q = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$\text{I} \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho} \Delta u - P - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho} \Delta v - Q - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\eta}{\rho} \Delta w - (u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y}) - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Ces équations définissent les fonctions u , v , w et p des variables x , y , z , t .

a) Introduction d'hypothèses supplémentaires et changement d'axes. — Introduisons maintenant 3 hypothèses.

Les vitesses u et v ne dépendent que de x , y et t .

La vitesse w ne dépend que de r et de z , r étant la distance à Oz du point considéré ($r^2 = x^2 + y^2$).

Ces 3 hypothèses se traduisent par les 3 équations suivantes.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Tenant compte de ces conditions nous pouvons écrire le système

$$\text{II} \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho} \Delta u - P - \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho} \Delta v - Q - \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\eta}{\rho} \Delta w - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{ux+vy}{r} - w \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Rapportons maintenant le mouvement, non plus à des axes fixes $Oxyz$, mais à des axes mobiles $Ox y z$ entraînés dans une rotation autour de Oz par le rotor de la pompe avec une vitesse angulaire ω que nous supposerons constante. Les équations définissant ce changement de coordonnées sont :

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \omega t - y_1 \sin \omega t \\ y = y_1 \sin \omega t + x_1 \cos \omega t \\ z = z_1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u = u_1 \cos \omega t - v_1 \sin \omega t \\ v = u_1 \sin \omega t + v_1 \cos \omega t \\ w = w_1 \end{cases}$$

Remarquons que la distance r d'un point à l'axe Oz reste

constante. Dans ce nouveau système, en négligeant, par simplification d'écrire les indices (1) on obtient le système III.

$$\text{III} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho} \Delta u - P + \omega (x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} + v) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho} \Delta v - Q + \omega (x \frac{\partial v}{\partial y} - y \frac{\partial v}{\partial x} - u) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\eta}{\rho} \Delta w - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{ux+vy}{r} - \omega \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

On peut d'ailleurs écrire directement ces équations par application du théorème de Coriolis.

b) **Conditions d'Intégrabilité.** — Introduisons maintenant les conditions d'intégrabilité exprimant qu'il existe une fonction p et qui vont nous permettre de former les équation définissant u, v, w . Ces conditions sont.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \end{array} \right.$$

Remarquons que $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ ne portent que sur des fonctions de x et de y . Leurs dérivées par rapport à z sont nulles et nous en déduirons que la dérivée $\frac{\partial p}{\partial z}$ est une fonction ne dépendant que de z . C'est donc une fonction que nous désignerons par $\chi(z)$ en attendant de mieux en préciser la forme. Nous aurons pour déterminer u, v, w le système IV.

$$\text{IV} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta}{\rho} \Delta w - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{ux+vy}{r} - \omega \frac{\partial w}{\partial z} = \chi(z) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\eta}{\rho} (\frac{\partial}{\partial y} \Delta u - \frac{\partial}{\partial x} \Delta v) - (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) + \omega [\frac{\partial}{\partial y} (x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial v}{\partial y} - y \frac{\partial v}{\partial x})] + \omega (\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \end{array} \right.$$

Mais la 2^e équation du système montre que :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

c'est-à-dire que $\frac{\partial w}{\partial z}$ est une fonction des variables x et y seulement. Cette condition est remplie si w est une fonction de la forme :

$$w = z \phi(r) + \lambda(r)$$

les fonctions Ψ et λ étant deux fonctions arbitraires. Introduisons cette condition dans l'équation IV, nous aurons :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial r} = z \phi' + \lambda' \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \phi \\ \Delta w = \frac{1}{r} [z(\Psi r)' + (\lambda' r)'] \end{cases}$$

et enfin :

$$z \left[\frac{\eta}{\rho} \frac{(\phi' r)'}{r} - \phi' \frac{ux+vy}{r} - \phi^2 \right] + \left[\frac{\eta}{\rho} \frac{(\lambda' r)'}{r} - \lambda' \frac{ux+vy}{r} - \lambda \phi \right] = \chi(z)$$

Cette équation sera vérifiée si on prend pour $\chi(z)$ une fonction linéaire de z .

$$\chi(z) = D_1 z + D_2$$

D_1 et D_2 étant 2 constantes. Dans ces conditions on a :

$$IV_1 \begin{cases} \frac{\eta}{\rho} \frac{(\phi' r)'}{r} - \phi' \frac{ux+vy}{r} - \phi^2 = D_1 \\ \frac{\eta}{\rho} \frac{(\lambda' r)'}{r} - \lambda' \frac{ux+vy}{r} - \lambda \phi = D_2 \end{cases}$$

Mettons maintenant en évidence la composante radiale U et la composante tangentielle V . Introduisons de plus l'hypothèse supplémentaire que U et V ne dépendent que de r . Nous aurons, en appelant θ l'angle polaire du point variable.

$$\begin{cases} u = U \cos \theta - V \sin \theta \\ v = U \sin \theta + V \cos \theta \end{cases}$$

On en déduit les combinaisons qui nous seront utiles plus tard :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = U' + \frac{U}{r} = \phi(r) \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -(\nu' + \frac{\nu}{r}) = \Lambda(r) \end{cases}$$

si bien que les 3 premières équations du système IV s'écrivent :

$$\begin{cases} U' + \frac{U}{r} + \phi = 0 \\ \frac{\eta}{\rho} \frac{(\phi' r)'}{r} - \phi' U - \phi^2 = D_1 \\ \frac{\eta}{\rho} \frac{(\lambda' r)'}{r} - \lambda' U - \lambda \phi = D_2 \end{cases}$$

Ces équations définissent les fonctions $U(r)$ $\Psi(r)$ $\lambda(r)$.

Pour déterminer V nous avons la 3^e équation du système IV. Elle s'écrit :

$$\frac{\eta}{\rho} \frac{(\Lambda' r)'}{r} - \Lambda' U + \Lambda \phi = 0$$

Nous avons donc, en définitive, pour calculer U , V , Ψ , λ , Λ , les équations suivantes à intégrer dans l'ordre d'écriture :

$$V \begin{cases} U' + \frac{U}{r} + \phi = 0 \\ \frac{\eta}{\rho} \frac{(\phi' r)'}{r} - \phi' U - \phi^2 = D_1 \\ \frac{\eta}{\rho} \frac{(\lambda' r)'}{r} - \lambda' U - \lambda \phi = D_2 \\ \frac{\eta}{\rho} \frac{(\Lambda' r)'}{r} - \Lambda' U + \Lambda \phi = 0 \\ V' + \frac{V}{r} + \Lambda = 0 \end{cases}$$

Calcul de la pression. — Avant de discuter le système V, proposons nous de calculer la différentielle totale dp . Nous calculerons successivement chacune des dérivées partielles. Nous avons tout d'abord :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\phi' \cos \theta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \Lambda' \sin \theta \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \Delta u = \Lambda' \sin \theta - \phi' \cos \theta \\ \Delta v = -\Lambda' \cos \theta - \phi' \sin \theta \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} P = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = UU' \cos \theta - \frac{UV \sin \theta}{r} - \frac{V^2}{r} \cos \theta - UV' \sin \theta \\ Q = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = UU' \sin \theta + \frac{UV \cos \theta}{r} - \frac{V^2}{r} \sin \theta + UV' \cos \theta \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dx = \cos. \theta dr - r \sin. \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos. \theta d\theta \end{cases}$$

on en déduit

$$\begin{cases} \Delta u dx + \Delta v dy = -\phi' dr - \Lambda' r d\theta \\ P dx + Q dy = (UU' - \frac{v^2}{r}) dr + r U (\frac{v}{r} + v') d\theta \\ (x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}) dx + (x \frac{\partial v}{\partial y} - y \frac{\partial v}{\partial x}) dy = -V dr + U r d\theta \\ v dx - u dy = V dr - U r d\theta \end{cases}$$

pour calculer la différentielle de la pression on a

$$\frac{1}{\rho} dp = \left[-\frac{\rho}{\rho} \phi' - (UU' - \frac{v^2}{r}) \right] dr + \left[-\rho \Lambda' - U(V' + \frac{V}{r}) \right] r d\theta + \left[\frac{\rho}{\rho} \Delta w - \frac{\partial w}{\partial r} U - w \frac{\partial w}{\partial z} \right] dz$$

On a comme expression de la pression la relation :

$$\frac{1}{\rho} d\rho = \left[-\frac{\partial}{\rho} \Phi' - UU' + \frac{V^2}{r} \right] dr + \left[-D_3 \right] r d\theta + (D_1 z + D_2) dz$$

ou encore

$$\frac{1}{\rho} (\rho - \rho_0) = \left[-\frac{\partial}{\rho} \Phi - U^2 \right]_0^r + \int_0^r \left(\frac{V^2}{r} \right) dr - D_3 (\theta - \theta_0) + \frac{D_1}{2} (z^2 - z_0^2) + D_2 (z - z_0)$$

en désignant par p_0 la pression au point $r=0$, $z = z_0$. Remarquons que pour que la pression existe sur l'axe oz il faut que

$$D_3 = 0.$$

Nous aurons alors comme expression de la pression :

$$\frac{1}{\rho} (\rho - \rho_0) = \left[-\frac{\partial}{\rho} \Phi - \frac{U^2}{2} \right]_0^r + \int_0^r \left(\frac{V^2}{r} \right) dr + \frac{D_1}{2} (z^2 - z_0^2) + D_2 (z - z_0)$$

Transformations du système V. — Etudions successivement chacune des équations constituant ce système V.

La première donne de suite

$$U^2 = -\frac{1}{\rho} \int \Phi_{,r} r dr + \frac{D_4}{r}$$

Nous remarquons que U doit être nul pour $r = 0$. Nous supposons dans la suite des calculs que D_4 est choisi de manière à satisfaire à cette condition et nous aurons

$$U = \frac{1}{\rho} (D_4 - \int \Phi_{,r} r dr) = \frac{\alpha(r)}{r}$$

La deuxième équation s'écrit

$$\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\Phi' r}{r} \right)' - \frac{\Phi'}{r} U - \Phi^2 = D_1$$

ou enfin :

$$\frac{\eta}{\rho} \left[-\alpha''' r^2 + \alpha'' r - \alpha' \right] + \left[\alpha'' r - \alpha' \right] \alpha - \alpha'^2 r = D_1 r^3$$

Nous prendrons pour α une solution telle que pour $r = 0$, $\frac{\alpha}{r}$ soit nul.

La troisième équation devient

$$\frac{\eta}{\rho} \frac{(\lambda' r)'}{r} - \alpha \frac{\lambda'}{r} + \lambda \frac{\alpha'}{r} = D_2$$

La quatrième équation intégrée une fois donne :

$$\frac{\eta}{\rho} \Lambda' r - \Lambda \alpha = D_3$$

La cinquième s'écrit enfin :

$$V = -\frac{1}{r} \int \Lambda r dr + \frac{D_5}{r} = \frac{1}{r} (D_5 - \int \Lambda r dr)$$

en remarquant comme pour le calcul de U que D_5 est choisi de telle sorte que pour $r = 0$, $V = 0$.

Nous avons donc finalement le tableau suivant.

$$\text{VI} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta}{\rho} \left[-\alpha''' r^2 + \alpha'' r - \alpha' \right] + \left[\alpha'' r - \alpha' \right] \alpha - \alpha'^2 r = D_1 r^3 \\ \frac{\eta}{\rho} \frac{(\lambda' r)'}{r} - \alpha \frac{\lambda'}{r} + \lambda \frac{\alpha'}{r} = D_2 \\ \frac{\eta}{\rho} \Lambda' r - \Lambda \alpha = D_3 \\ \psi = -\frac{\alpha'}{r} \\ U = \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{r} (D_4 - \int \psi r dr) \\ V = \frac{1}{r} (D_5 - \int \Lambda r dr) \end{array} \right.$$

Discussion du système VI. — Commençons tout d'abord par récapituler les hypothèses d'où nous sommes partis :

Nous avons supposé que les composantes u et v ne dépendaient que de x et y et de t et qu'elles étaient indépendantes de z , puis que ω ne dépendait que de r et de z . Introduisant alors les conditions d'intégralité nous avons déterminé la forme de ω et mis en évidence les équations :

$$\begin{cases} \frac{\eta}{\rho} \frac{(\psi' r)'}{r} - \psi' \frac{ux + vy}{r} - \phi^2 = D_1 \\ \frac{\eta}{\rho} \frac{(\lambda' r)'}{r} - \lambda' \frac{ux + vy}{r} - \lambda \phi = D_2 \end{cases}$$

Nous avons d'une part remarqué que $\frac{ux + vy}{r}$ était U, composante radiale de la vitesse, et que, d'autre part, ces équations reliaient des fonctions de r . Nous avons alors introduit la condition que U et V ne dépendaient que de r .

Nous aurions pu nous passer de cette hypothèse en supposant simplement

$$\begin{aligned} \phi &= \pm \sqrt{-D_1} = K_0 \\ \lambda &= \mp \frac{D_2}{\sqrt{-D_1}} = K_1 \end{aligned}$$

la fonction ω devenait alors indépendante de x et de y et se réduisait à une fonction linéaire de z .

$$\omega = \pm \sqrt{-D_1} z \mp \frac{D_2}{\sqrt{-D_1}} = K_0 z + K_1$$

et le système IV s'écrit alors simplement

$$\text{VII} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + K_0 = 0 \\ &\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta u - \frac{\partial}{\partial x} \Delta v \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \omega \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial v}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial v}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

qui détermine 2 fonctions u et v de xy , toujours rapportées aux axes mobiles.

Nous mettons ainsi en évidence deux grandes familles de distributions possibles.

La 1^e famille peut être étudiée par le système VI. Les composantes U et V ne dépendent que de r . Pour qu'une solution soit acceptable il faut que pour $r = 0$,

$$\begin{cases} U = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

Cette solution hydrodynamique correspond à l'étude hydraulique usuelle des pompes centrifuges. Elle ne peut, comme nous le verrons plus loin, appliquer entièrement la différence entre la puissance calculée et la puissance réalisée.

La 2^e famille peut être étudiée par le système VII. Les composantes U et V dépendent de x et de y . Pour qu'une solution soit acceptable il faut, comme précédemment que pour $r = 0$, les vitesses U et V soient nulles.

Cette solution hydrodynamique ne correspond à aucune étude hydraulique actuellement faite. Elle donnera l'explication de l'inclinaison de la vitesse moyenne et par suite de la différence entre la puissance calculée et la puissance réalisée.

c) **Etude des Distributions de la Première Famille.** — Remarquons tout d'abord qu'à toute solution $\alpha(r)$ de l'équation VI₁ on peut par quadrature faire correspondre des fonctions ψ U et V. Il est donc nécessaire d'être d'étudier au moins sommairement l'équation VI₁.

Cherchons une solution de la forme :

$$\alpha = ar^q$$

on a la solution particulière

$$\alpha_1 = \pm \frac{f}{2} \sqrt{-D_1} r^2 = \frac{K_0}{2} r^2$$

Essayons maintenant une solution de la forme.

$$\alpha = \alpha_1 \beta$$

nous aurons pour déterminer la fonction s l'équation différentielle

$$\frac{\eta}{\rho} \{ -\beta''' r^2 + \beta'' r - \beta' \} + \{ \beta'' r - \beta' \} (\alpha_1 + \beta) - \{ \beta'^2 + 2\alpha_1' \beta' \} r = 0$$

Elle admet une solution de la forme

$$\beta = b + c r^2$$

$$(s-2) \left\{ b - \frac{\eta}{\rho} (s-2) \right\} - \frac{K_0}{2} (s-b) r^2 + 2c (s-1) r^5 = 0$$

On obtient les résultats suivants :

$$s = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} b + \frac{2\eta}{\rho} = 0 \\ k_0 = 0 \\ 2c = 0 \end{array} \right. \quad \beta_1 = -\frac{2\eta}{\rho} \quad D_1 = 0$$

$$s = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} b + \frac{\eta}{\rho} = 0 \\ k_0 = 0 \end{array} \right. \quad \beta_2 = -\frac{\eta}{\rho} + c r^2 \quad D_1 = 0$$

$$s = 2 \quad c = -K_0 \quad \beta_3 = b - K_0 r^2$$

$$s = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} b - \frac{\eta}{\rho} = 0 \\ K_0 = 0 \\ c = 0 \end{array} \right. \quad \beta_4 = \frac{\eta}{\rho} \quad D_1 = 0$$

Mais nous avons vu que $\frac{\alpha}{r}$ doit être nul sur l'axe, nous ne pouvons donc prendre comme acceptables que les 2 intégrales particulières.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{K_0}{2} r^2 \\ \alpha_2 = -\frac{K_0}{2} r^2 \end{array} \right.$$

Etudions maintenant quelle forme doit avoir la fonction z et la fonction ψ pour donner naissance à une fonction utilisable pour représenter les fonctions U V et w .

La fonction ψ doit avoir pour $r = 0$ une valeur non nulle, et non infinie puisque, sur cet axe nous aurons :

$$w = z \phi(0) + \lambda(0)$$

D'autre part.

$$U = \frac{1}{r} [D_4 - \int \phi r dr]$$

doit avoir une valeur nulle pour $r = 0$, si bien qu'on peut poser.

$$U = -\frac{1}{r} \int_0^r \phi r dr$$

en remarquant que pour $r = 0$ l'élément différentiel ψr est bien nul. Il faut remarquer que aux environs de $r = 0$ la valeur de U est

$$U = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \phi(0) r^2 = \lim_{r \rightarrow 0} r \phi(0) = 0$$

Cherchons à nous rendre compte de la forme de la fonction ψ en posant :

$$\int_0^r \phi r dr = a_0 r^2 + a_1 r^3 + a_2 r^4 + a_3 r^5 + \dots$$

En identifiant suivant les puissances croissantes de r .

On obtient successivement :

$$a_1 = 0$$

$$16 \frac{\eta}{\rho} a_2 - 4 a_0^2 = D_1$$

$$45 \frac{\eta}{\rho} a_3 + 8 a_0 a_2 = 0$$

$$96 \frac{\eta}{\rho} a_4 + 15 a_0 a_3 - 8 a_0 a_2 = 0$$

$$175 \frac{\eta}{\rho} a_5 + 8 a_2^2 + 24 a_0 a_4 - 20 a_0 a_3 = 0$$

.....

nous aurons donc, en nous limitant aux premier termes :

$$\int \psi r dr = a_0 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^5 + a_4 r^6$$

et

$$-U = \frac{1}{r} \int \psi r dr = a_0 r + a_2 r^3 + a_3 r^4.$$

Les différents coefficients dépendent de a_0 par les équations ci-dessus écrites. Nous nous bornerons, sur cette question, à cette indication de calcul.

Remarquons que si on suppose $a_r = 0$, les autres termes s'annulent et que U se réduit à

$$-U = \pm \frac{\sqrt{H_1}}{2} r$$

solution déjà trouvée et dont nous partirons pour l'étude d'un cas particulier.

En résumé nous avons mis en évidence une solution particulière de l'équation VI.

$$\alpha = \pm \frac{K_0}{2} r^2$$

et la valeur correspondante de U .

$$U = \pm \frac{K_0}{2} r_0$$

d) Etude des Distributions de la Deuxième famille. — Nous allons reprendre les équations VII et les transformer en remarquant tout d'abord que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \Delta u - \frac{\partial}{\partial x} \Delta v = \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \Delta \Lambda \\ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = u \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + v \frac{\partial \Lambda}{\partial y} - \Lambda K_0 \end{array} \right.$$

en prenant pour fonction auxiliaire la fonction Λ précédemment définie et en tenant compte de l'équation de continuité. D'autre part nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial y} (x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial v}{\partial x}) = x \frac{\partial \Lambda}{\partial y} - y \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + K_v$$

Le système VII s'écrit donc :

$$\text{VIII} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} - \Lambda = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + K_v = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta \Lambda = u \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + v \frac{\partial \Lambda}{\partial y} - \Lambda K_v - \omega (x \frac{\partial \Lambda}{\partial y} - y \frac{\partial \Lambda}{\partial x}) \end{array} \right.$$

Ce système d'équations aux Dérivées partielles entre u , v , Λ définit ces 3 fonctions de x , y .

Nous allons étudier deux solutions particulières de ce système VIII.

Première solution particulière. — Proposons nous d'étudier la question suivante, qui s'est posée dans l'étude des pompes centrifuges.

Est-il possible de trouver une distribution des vitesses telles que la projection horizontale des trajectoires liquides soit une spirale ?

Commençons tout d'abord par mettre en évidence l'angle φ_0 que fait la vitesse avec le rayon vecteur du point et la valeur R de la vitesse. Nous avons les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = R \cos (\varphi_0 + \theta) \\ v = R \sin (\varphi_0 + \theta) \end{array} \right.$$

Le système VIII s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial r} \cos \varphi_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \varphi_0 + \frac{R}{r} \cos \varphi_0 + K_0 = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial r} \sin \varphi_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} \cos \varphi_0 + \frac{R}{r} \sin \varphi_0 + \Lambda = 0 \\ \frac{\Omega}{\rho} \Delta \Lambda = R \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial r} \cos \varphi_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \sin \varphi_0 \right) + \omega \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} - \Lambda K_0 \end{array} \right.$$

Ce système définit deux fonctions inconnues R et Λ , si nous pouvons trouver une solution commune aux 3 équations de ce système.

Remarquons tout d'abord que la première équation, linéaire et du 1^{er} ordre en R définit cette fonction à l'aide d'une fonction arbitraire. La 2^e équation permet d'exprimer Λ à l'aide de cette fonction arbitraire. La 3^e équation peut, par substitution de Λ et de R déterminer la fonction laissée arbitraire.

Le système d'équations différentielles correspondant à la 1^{re} équation s'écrit :

$$\frac{dr}{\cos \varphi_0} = \frac{d\theta}{\frac{1}{r} \sin \varphi_0} = \frac{-dR}{\frac{R}{r} \cos \varphi_0 + K_0}$$

on en déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{e^\theta}{r \sin \varphi_0} \\ C_2 = Rr + \frac{K_0 r^2}{2 \cos \varphi_0} \end{array} \right.$$

la fonction R est donc, en représentant par Z la fonction arbitraire et en posant $\frac{e^\theta}{r \sin \varphi_0} = \sigma$

$$R = -\frac{K_0 r}{2 \cos \varphi_0} + \frac{1}{r} Z(\sigma)$$

Pour simplifier l'exposé posons :

$$\begin{cases} P_1 = 2 \zeta' + m \zeta' \zeta + m \zeta' \\ P_2 = \zeta' \zeta + \zeta' \end{cases} \quad \text{avec } m = \lg \varphi_o$$

Remarquons que cette équation contient des termes en $\frac{1}{r^4} \cdot \frac{1}{r^2}$ et des fonctions de σ . Le système sera vérifié si on a :

$$\begin{cases} \frac{\eta}{\rho} \frac{1}{\cos \varphi_o} \{ m P_1 + m P_1' \zeta + 2 P_1 + P_2 \} + \zeta \{ P_1 + m P_2 \} = 0 \\ \frac{K_o}{2 \cos \varphi_o} \{ P_1 + m P_2 \} + \frac{\omega}{\cos \varphi_o} P_2 - \frac{K_o \zeta'}{\cos \varphi_o} = 0 \\ K_o^2 \lg \varphi_o = 0 \end{cases}$$

Ce système s'écrit encore :

$$\begin{cases} K_o^2 \lg \varphi_o = 0 \\ P_2 = 0 \\ 2 \frac{\eta}{\rho} \zeta' + 2 \zeta \zeta' \cos \varphi_o = 0 \end{cases}$$

qui finalement donne le système.

$$\begin{cases} K_o^2 \lg \varphi_o = 0 \\ \zeta' \zeta = \text{constante} \\ \zeta' \left\{ 2 \frac{\eta}{\rho} + \zeta \cos \varphi_o \right\} = 0 \end{cases}$$

on a donc finalement les 4 solutions possibles.

$$\begin{cases} K_o = 0 \\ \zeta = \text{const.} \end{cases} \quad \begin{cases} K_o = 0 \\ \zeta = -\frac{\eta}{\rho} \frac{1}{\cos \varphi_o} \end{cases}$$

Remarquons que pour $r = 0$ R devient infini. Une telle solution peut elle convenir ? Pour y répondre nous allons prendre le cas le plus simple et déterminer quelle est la tra-

jectoire suivie par une molécule liquide nous prendrons le cas où

$$\begin{cases} R = \frac{c}{r} \\ \varphi = \varphi_0 \\ w = K_1 \end{cases}$$

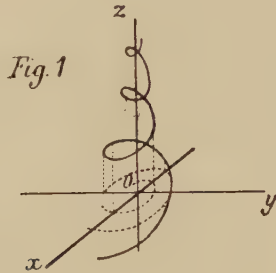
Les équations différentielles des filets liquides sont :

$$\frac{\frac{c}{r} dx}{\cos(\varphi_0 + \theta)} = \frac{dy}{\sin(\varphi_0 + \theta)} = \frac{dz}{K_1}$$

on en déduit

$$\begin{cases} x = e^{\frac{\theta}{\tan \varphi_0}} \cos \theta \\ y = e^{\frac{\theta}{\tan \varphi_0}} \sin \theta \\ z = \frac{K_1}{2 \cos \varphi_0} e^{\frac{2\theta}{\tan \varphi_0}} + K_2 \end{cases}$$

Le filet liquide s'enroule autour de l'axe en s'en rapprochant constamment. Au-dessus d'une certaine cote correspondant à



la sortie de la pompe, cette solution ne convient plus. D'autre part lorsque les filets liquides sont assez près de Oz ils se confondent les uns avec les autres pour former une seule masse liquide.

Il convient de remarquer que les fonctions R ainsi trouvées appartiennent au même type de fonctions que celles précédem-

ment trouvées : Elles ne dépendent que de la distance à l'axe et non de l'azimut.

Deuxième solution particulière. — Remarquons que le système VIII admet la solution particulière

$$\Lambda = 0$$

qui entraîne les 2 équations

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -K_0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

on en déduit que u et v sont 2 fonctions harmoniques et connaissant l'une, u par exemple, on peut calculer l'autre en remarquant que

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int \frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy + K_0 y + C$$

A une fonction linéaire près les fonctions u et v sont donc deux fonctions harmoniques conjuguées.

On a donc, parmi les fonctions harmoniques, la possibilité de choisir celles d'entre elles, ou une combinaison linéaire de celles d'entre elles qui représentent le mieux le phénomène. A quelles conditions doivent satisfaire ces fonctions ?

Introduisons ensuite une condition de périodicité due à l'existence d'aubes en nombre fini. Soit n le nombre de ces aubes, nous créons ainsi dans la pompe un nombre n de cellules égales. Si donc laissant constante la distance ρ à l'origine nous augmentons l'angle polaire θ de $\frac{2\pi}{n}$ nous devons retrouver la même vitesse. Il faudra donc le module R et l'angle φ de la vitesse avec le rayon vecteur soient des fonctions périodiques de l'angle θ , ayant comme périodes $\frac{2\pi}{n}$.

Analysons ces conditions. On peut tout d'abord introduire les composantes radicales et tangentielles. U et V de la vitesse u . Il faut que chacune de ces frontières soit une fonction périodique de l'angle θ de période $\frac{2\pi}{n}$.

On a :

$$\begin{cases} u = U \cos \theta - V \sin \theta \\ v = U \sin \theta + V \cos \theta \end{cases}$$

On en déduit pour la détermination de U et V les 2 équations :

$$\begin{cases} -K_o = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{U}{r} \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \end{cases}$$

qui s'écrivent

$$\text{IX} \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r} = -K_o \\ \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{V}{r} = 0 \end{cases}$$

Remarquons que si U et U_2 sont deux solutions de ce système, la somme $(U_1 + U_2)$ $(V_1 + V_2)$ sera une solution de ce système.

Or une solution est évidente qui fait disparaître le second membre c'est

$$\begin{cases} U_1 = -\frac{K_o}{2} r \\ V_1 = \frac{h_o}{r} \end{cases}$$

A cette solution particulière nous ajouterons des solutions du système.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{U}{r} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{V}{r} = 0 \end{cases}$$

Introduisons maintenant la conditions que U et V sont deux fonctions périodiques de θ et de période de $\frac{2\pi}{n}$. Cherchons à satisfaire à ce système en posant :

$$\begin{cases} U = f(r) \cos K\theta + \varphi(r) \sin K\theta \\ V = F(r) \cos K\theta + \Phi(r) \sin K\theta \end{cases}$$

K étant une constante que nous déterminerons plus tard. Dans ces conditions on a pour déterminer les 2 fonctions de r, que nous avons introduites : f et F, les 2 systèmes :

$$\begin{cases} f' + \frac{k\Phi}{r} + \frac{f}{r} = 0 \\ \phi' + \frac{kf}{r} + \frac{\Phi}{r} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi' - \frac{kF}{r} + \frac{\varphi}{r} = 0 \\ F' - k\frac{\varphi}{r} + \frac{F'}{r} = 0 \end{cases}$$

Ils s'écrivent encore :

$$\begin{cases} (fr)' + k\phi = 0 \\ (\phi r)' + kf = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (\varphi r)' - k\frac{F}{r} = 0 \\ (Fr)' - k\varphi = 0 \end{cases}$$

cherchons une solution de la forme.

$$\begin{cases} f = a_K r^q \\ \phi = a_K r^q \end{cases} \quad \begin{cases} F = b_K r^q \\ \varphi = b_K r^q \end{cases}$$

en désignant par a_k et b_k deux constantes. Les équations étudiées admettront des solutions de cette forme si on prend pour q une des 2 valeurs :

$$\begin{cases} q = -(k+1) \\ q = (k-1) \end{cases}$$

On obtient une solution de la forme.

$$\begin{cases} U_K = a_K \frac{1}{r^{K+1}} \cos K\theta + b_K r^{K-1} \sin k\theta \\ V_K = a_K \frac{1}{r^{K+1}} \sin k\theta + b_K r^{K-1} \cos K\theta \end{cases}$$

Remarquons que les équations sont linéaires. Nous pourrions donc écrire

$$\begin{cases} U = -\frac{k_0}{2} r + \sum U_K \\ V = \frac{h_0}{r} + \sum V_K \end{cases}$$

Introduisons maintenant la condition que U et V sont finies pour $r = 0$. Les coefficients a sont nuls et l'on a finalement :

$$\begin{cases} U = -\frac{k_0}{2} + \sum b_K r^{K-1} \sin K\theta \\ V = \frac{k_0}{r} + \sum b_K r^{K-1} \cos K\theta \end{cases}$$

Pour que U et V soient des fonctions périodiques de $\frac{2}{n}$, il suffira de prendre pour k un multiple de n et on obtiendra ainsi une suite de fonctions

$$U_n \quad U_{2n} \quad U_{3n} \dots U_{kn} \quad , \quad V_n \quad V_{2n} \dots V_{kn}$$

dont les sommes seront des solutions des équations données

$$\begin{cases} U = -\frac{k_0}{2} r + \sum b_{Kn} \left(\frac{r}{R}\right)^{Kn-1} \sin Kn\theta \\ V = \sum b_{Kn} \left(\frac{r}{R}\right)^{Kn-1} \cos Kn\theta \end{cases}$$

Les coefficients b , en nombre infini, ne dépendent pas de r . Mais ils peuvent dépendre de la vitesse de rotation ω , de la forme des aubes, de leur nombre n . Faisons apparaître le rayon R

de la partie du diffuseur la plus éloignée du centre de manière à mettre en évidence le rapport $\frac{r}{R}$, inférieur à l'unité, nous aurons

$$\begin{cases} U = -\frac{K_0}{2} r + \sum b_{Kn} r^{Kn-1} \sin Kn\theta \\ V = 0 + \sum b_{Kn} r^{Kn-1} \cos Kn\theta \end{cases}$$

Remarquons que, si nous connaissions la répartition des U et B le long d'une circonférence du centre O et de rayon r , par exemple la répartition des vitesses à la périphérie du rotor, nous pourrions en remarquant que ce sont des fonctions périodiques de θ , de période $\frac{2\pi}{n}$, les développer en série de Fourier et identifier avec les coefficients de ces développements supposés connus, les coefficients b_n .

Il y a donc, dans cette solution, une différence essentielle avec les résultats obtenus lors de l'étude de la première solution particulière. Alors que pour celle-ci nous ne disposions que de quelques coefficients arbitraires, provenant de l'intégration d'équations différentielles, nous disposons maintenant d'un nombre infini de coefficients nous permettant de représenter une distribution quelconque des vitesses U et V.

De cette différence essentielle nous tirerons quelques conclusions à l'étude des calculs numériques.

c) Etude d'un cas particulier de Distribution de la Première Famille. — Nous allons partir de la solution particulière lors de l'étude des distributions de la première famille.

$$\alpha_1 = \frac{K_0}{2} r^2$$

on en déduit tout d'abord

$$\psi = -\frac{\alpha_1'}{r} = -K_0$$

La fonction λ est définie par l'équation

$$\frac{D}{\rho} \lambda' r - a \lambda r^2 = D_2 \frac{r^2}{2} + D_4$$

équation linéaire du 1^{er} ordre en λ qui s'intègre en donnant

$$\lambda = D_5 e^{\frac{a}{2\eta} r^2} - \frac{D_2}{2a}$$

en ne prenant pour λ qu'une fonction restant finie pour $r = 0$.

Calculons ensuite $R \cos \varphi$. Nous avons :

$$R \cos \varphi = \frac{f(r)}{r} = \frac{a r^2}{r} = ar$$

Calculons maintenant Λ qui est défini par :

$$\frac{D}{\rho} \Lambda' r - \Lambda r = 0$$

on en déduit en posant $\frac{\rho}{2\eta} = K$.

$$\Lambda = D_6 e^{Kar^2}$$

d'où

$$R \sin \varphi = \frac{1}{r} \int \Lambda r dr$$

en introduisant la condition que R soit fixé sur l'axe :

$$R \sin \varphi = \frac{D_6}{2Ka} \times \frac{e^{Kar^2} - 1}{r}$$

Nous avons donc finalement la solution particulière :

$$\begin{cases} R \cos \varphi = ar \\ R \sin \varphi = \frac{D_6}{2Ka} \frac{e^{Kar^2} - 1}{r} \\ w = 2az + D_5 e^{-Kar^2} - \frac{D_2}{2a} \end{cases}$$

dans laquelle

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \frac{\rho}{2\eta} \\ \alpha = \frac{\sqrt{D_1}}{2} \\ D_1, D_2, D_5 \text{ et } D_6 : 4 \text{ constantes} \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant étudier une série de questions permettant d'effectuer des calculs numériques.

Profil de la pompe. Section méridienne. — Nous avons comme équation différentielle de la section méridienne l'équation

$$\frac{dz}{dr} = \frac{w}{R \cos \varphi}$$

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre:

$$z' + 2 \frac{z}{r} = \frac{D_5}{a} \frac{e^{-Kar^2}}{r} - \frac{D_2}{2a^2} \frac{1}{r}$$

Cette équation s'intègre sans difficultés et on obtient :

$$z = -\frac{D_2}{4a^2} + \frac{D_8}{r^2} + \frac{D_5}{2Ka^2} \frac{e^{-Kar^2}}{r^2}$$

où D_8 est une nouvelle constante.

Ces courbes, que nous étudierons plus en détail aux « Calculs numériques » présentent un point à l'infini sur Oz pour $r = 0$, à moins toutefois que D_8 ait une certaine valeur telle que

$$2KD_8a^2 + D_5 = 0$$

Elles présentent aussi un point à l'infini pour $r\infty$. Ce point appartient d'ailleurs à une branche parabolique. L'ordonnée est positive, si $D_5 > 0$. L'ordonnée est négative si $D_5 < 0$.

Profil des aubes, en projection horizontale. — L'équation différentielle en coordonnées polaire du profil des aubes est .

$$\frac{r}{r'} = \operatorname{tg} \varphi$$

d'où :

$$\theta - \theta_0 = \frac{D_6}{2Ka^2} \int \frac{e^{-Kar^2} - 1}{r^2} \cdot \frac{dr}{r}$$

Etablissons une relation exprimant que pour $r = 0$, θ a une valeur finie. Aux environs de l'origine la valeur de $d\theta$ est.

$$\omega d\theta = \frac{D_6}{2Ka^2} \left[\frac{-Kar^2 + 1 - 1}{r^2} \right] \frac{dr}{r} = \left(-\frac{D_6}{2a} \right) \frac{dr}{r}$$

l'angle θ sera fini si on pose.

$$D_6 = 0$$

et on pourra prendre $\theta_0 = 0$. Si bien qu'on aura : dans ce cas particulier

$$d\theta = \frac{\omega}{Ka^2} \left[\frac{e^{-Kar^2} - 1}{r^2} + Ka \right] \frac{dr}{r}$$

Nous partirons pour les calculs numériques des équations suivantes :

$$\begin{cases} R \cos \varphi = -ar \\ R \sin \varphi = -\omega \left(\frac{e^{-Kar^2} - 1}{Kar} - \frac{r}{2} \right) \\ w = 2az + D_3 e^{-Kar^2} - \frac{D_2}{2a} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} K = \frac{\rho}{\eta} \\ a = \frac{\sqrt{D_1}}{2} \\ D_1, D_2, D_3 \text{ trois constantes} \end{cases}$$

La méridienne de la pompe a pour équations

$$z = -\frac{D_2}{2a^2} + \frac{D_2}{r^2} + \frac{D_5}{2Ka^2} \frac{e^{Kar^2}}{r^2}$$

Le profil des aubes a comme projection horizontale la courbe en coordonnées polaires.

$$\theta = \frac{\omega}{Ka^2} \int_0 \left[\frac{e^{-Kar^2}}{r^2} + Ka \right] \frac{dr}{r}$$

e) **Etude de la Distribution de la Deuxième Famille.** — Les discussions des hydrauliciens s'occupant des théories hydrauliques des pompes centrifuges ont longuement porté sur la vitesse moyenne et sur l'inclinaison de celle-ci sur la vitesse à l'aube. Il est intéressant de remarquer que dans la première distribution des vitesses on ne peut expliquer l'origine de ce phénomène. Dans le cas d'une Distribution de la Deuxième famille on peut voir que l'inclinaison de la vitesse moyenne sur le rayon vecteur est différente de l'inclinaison à l'aube. Etudions donc ce phénomène commu sous le nom de Déflection.

Etude de la Déflection. — La vitesse moyenne (U_m V_m est définie par les relations

$$\begin{cases} U_m = -\frac{K_0}{2} r + \frac{1}{\frac{2\mathcal{H}}{n}} \sum b_K \int_0^{\frac{2\mathcal{H}}{n}} \sin Kn \theta d\theta = -\frac{K_0}{2} r \\ V_m = \frac{h_0}{r} + \frac{1}{\frac{2\mathcal{H}}{n}} \sum b_K \int_0^{\frac{2\mathcal{H}}{n}} \cos Kn \theta d\theta = \frac{h_0}{r} \end{cases}$$

Si bien que si on désigne par φ_m l'inclinaison sur le rayon vecteur de la vitesse moyenne on aura :

$$\operatorname{tg} \varphi_m = -\frac{2 h_0}{K_0 r^2}$$

D'autre part à l'aube, c'est-à-dire pour $\varphi = 0$, nous avons

$$\begin{cases} U_o = -\frac{K_o}{2} r \\ V_o = \frac{h_o}{r} + \sum b_K \left(\frac{r}{R}\right)^{K_o-1} \end{cases}$$

D'où

$$tg \varphi_o = -\frac{2 h_o}{K_o r^2} - \frac{2}{K_o} \sum b_K R \left(\frac{r}{R}\right)^{K_o-2}$$

On en déduit donc la relation :

$$tg \varphi_m = tg \varphi_o + \frac{2}{K_o} \sum b_K R \left(\frac{r}{R}\right)^{K_o-2}$$

On peut transformer cette relation en faisant apparaître des termes ayant une signification mécanique. On peut en effet écrire :

$$\sum b_K R \left(\frac{r}{R}\right)^{K_o-2} = \frac{R^2}{r} \sum b_K \left(\frac{r}{R}\right)^{K_o-1} = [V_o + \omega r] \frac{R^2}{r} = \frac{R^2}{r} [V_o - V_m]$$

et on obtient la relation

$$tg \varphi_m - tg \varphi_o = \frac{2 R^2}{K_o r} [V_o - V_m]$$

Pour une pompe donnée le produit

$$K_o \frac{tg \varphi_m - \varphi_o}{V_o - V_m}$$

serait donc constant c'est-à-dire indépendant de la vitesse de rotation, du débit, etc.

Cette formule, si on remarque que la vitesse à l'aube V_o est différente de la vitesse V_m de l'ensemble des termes en b , peut expliquer la déflexion. C'est la première qu'une théorie générale fournisse.

f) **Détermination d'un filet liquide.** — Les équations différentielles d'un filet fluide sont

$$\frac{dr}{U} = \frac{r d\theta}{V} = \frac{dz}{u}$$

ou encore :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

L'équation différentielle des projections horizontales s'écrit

$$\frac{r'}{r} = \frac{U}{V} = \frac{-\frac{K_0}{2}r + \sum b_{Kn} \left(\frac{r}{R}\right)^{Kn-1} \sin Kn\theta}{\frac{K_0}{r} + \sum b_{Kn} \left(\frac{r}{R}\right)^{Kn-1} \cos Kn\theta}$$

en intégrant une fois on a donc la relation

$$R \sum \frac{1}{Kn} \left(\frac{r}{R}\right)^{Kn} \cos Kn\theta + \frac{K_0}{2} \int r^2 d\theta = \text{constante}$$

L'équation des projections verticales est :

$$\frac{dz}{K_0 z + K_1} = \frac{dr}{-\frac{K_0}{2}r + \sum b_{Kn} \left(\frac{r}{R}\right)^{Kn-1} \sin Kn\theta}$$

où on remplace θ par sa valeur en fonction de r . Remarquons que si nous désignons par $K_0 z(r)$ le dénominateur du second membre nous en déduirons l'expression :

$$K_0 z + K_1 = z \int \frac{dr}{S(r)}$$

La détermination complète de la trajectoire d'un filet liquide ne paraît exécutable complètement et une détermination approchée est impossible tant qu'on ne connaît pas les coefficients b .

Nous aurons des courbes oscillant autour de ces positions moyennes.

Une remarque importante doit être faite au sujet de la contraction.

Contraction. — Dans l'Etude du cas particulier précédent nous avons mis en évidence un profil de la méridienne de la pompe composé pour les 3 parties principales. Distributeur, Rotor et Diffuseur d'une seule courbe. Il en sera de même dans le cas de cette distribution. Montrons que deux filets liquides ne peuvent avoir des tangentes parallèles en tous leurs points.

En effet le coefficient angulaire de la tangente à la projection verticale est

$$\frac{dz_0}{dr} = \frac{K_0 z + K_I}{-\frac{K_0}{2} r + \sum b_{Kn} \left(\frac{r}{R}\right)^{Kn-1} \sin Kn\theta}$$

Dans cette expression l'angle θ est une fonction de r , comme par une équation différentielle du premier ordre. Cet angle θ dépend donc d'une constante arbitraire. Une fois cette expression intégrée nous aurons une fonction dépendant de deux constantes arbitraires que nous déterminerons en observant que le filet liquide passe par un point donné et y a une tangente donnée. Mais ces constantes varieront d'un point à un autre et les trajectoires ne seront pas parallèles entre elles en plusieurs points.

Or ainsi que nous le constaterons la plupart des pompes actuellement en service ont deux flasques du rotor parallèles. Il en résultera donc nécessairement à un moment donné un décollement de la veine de la paroi supérieure du rotor et l'existence d'une contraction.

Prérotation. — Dans l'étude du cas particulier précédent, la fonction W dépendait de la distance à l'axe, il lui était donc

possible de se raccorder avec la distribution normale des vitesses du liquide dans le tube d'amenée. Au contraire avec la deuxième distribution W est indépendant de la distance à l'axe, il y a donc nécessairement une discontinuité. Dans la partie du tuyau d'amenée éloignée de la pompe il n'y a aucun mouvement de rotation et la vitesse de l'eau est parallèle à l'axe du tuyau. Au moment où la distribution devient celle que nous avons étudiée la vitesse parallèle à l'axe devient la même pour tous les faits liquides et l'eau se trouve en même temps animée d'un mouvement de rotation.

C'est l'existence de cette discontinuité qui forme le phénomène de prérotation. La première distribution l'explique mal, la deuxième en donne une explication à première vue satisfaisante. Nous étudierons cette question plus en détail plus loin.

CHAPITRE II

CALCULS NUMÉRIQUES ET VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

Les résultats que nous avons obtenus jusqu'à présent sont purement mathématiques. Nous avons formé des solutions particulières générales de l'hydrodynamique. Nous les avons classées en deux familles.

Dans la première, qui correspond à la théorie usuelle des pompes centrifuges le phénomène est entièrement de Révolution autour de l'axe de la pompe. L'influence du nombre des aubes n'est pas mise en évidence. Nous nous sommes proposés d'étudier les formes des aubes du profil de la pompe. Ces courbes sont, en effet, d'après nos hypothèses telles que, en chacun de leurs points la vitesse soit tangente aux surfaces engendrées par ces courbes. Les résultats sont-ils acceptables pour des pompes centrifuges ou hélicoïdes-centrifuges ? Le chapitre actuel va nous permettre de répondre affirmativement.

Dans la seconde famille, nous avons pu mettre en évidence la périodicité du phénomène dû à ce que les aubes sont en nombre fini. Nous avons ainsi trouvé une loi de variation de la vitesse en fonction de l'angle et montré que la vitesse moyenne n'était pas inclinée sur le rayon vecteur du même angle que la vitesse à l'aube. Nous pouvions dès lors, proposer une expli-

cation à la constatation maintes fois faites, que la puissance réalisée est notablement plus faible que la puissance calculée. Sans pousser les calculs aussi loin que pour la pompe de la première famille, nous avons calculé l'allure générale des aubes et du profil de la pompe.

Les calculs numériques qui suivent ont donc pour but de montrer que les résultats obtenus conviennent sensiblement aux pompes de tracés courants. Ils permettent enfin de mettre en évidence trois résultats.

L'inclinaison de la vitesse moyenne sur la vitesse à la sortie de l'aube.

La préroration du liquide avant son entrée dans la pompe.

La contraction de la veine liquide à l'intérieur du rotor.

Ces deux derniers résultats sont susceptibles d'être vérifiés par l'expérience directe. Cette vérification peut s'opérer de la manière schématique suivante.

Le phénomène de préroration est l'entraînement dans la tubulure d'admission du liquide par le mouvement de rotation des aubes. Ce phénomène, souvent constaté nécessite que le liquide soit visqueux. Pour l'expliquer il faut prendre les Equations de Navier complètes et montrer que dans le tube cylindrique il y a un mouvement du liquide, correspondant à une rotation, possible. Pour le mettre en évidence un tube de verre fixé sur l'aspiration de la pompe suffit.

La contraction du liquide à l'intérieur du rotor suffit à expliquer en partie la différence entre la puissance calculée et la puissance réalisée. On peut d'ailleurs en calculer sensiblement l'importance en comparant ces résultats à ceux des vannes rectangulaires.

Pour compléter l'explication de la différence entre la puissance calculée et la puissance réalisée on peut faire intervenir l'inclinaison de la vitesse moyenne sur la vitesse à l'aube. Cette

inclinaison d'ailleurs avait été souvent préconisée par des auteurs variés, mais aucune explication de ce phénomène avait été donnée. Les équations que nous avons établies permettent de calculer cette inclinaison et de relier cette question à la théorie hydrodynamique des pompes centrifuges.

Nous diviserons les calculs numériques en deux paragraphes correspondant au premier cas particulier et au deuxième cas particulier.

α) Calculs numériques relatifs au premier cas particulier. —

Nous supposons que nous avons en désignant par R la vitesse absolue, φ son inclinaison sur le rayon vecteur :

$$\begin{cases} R \cos \varphi = -ar \\ R \sin \varphi = -\frac{D_6}{2Ka} \frac{e^{-Kar^2} - 1}{r} \\ w = 2a\omega + D_5 e^{-Kar^2} - \frac{D_2}{2a} \end{cases}$$

Nous avons d'ailleurs les constantes suivantes :

$$\begin{cases} k = \frac{\rho}{2\eta} \\ a = \frac{\sqrt{D_1}}{2} \\ D_1, D_2, D_5, D_6 \text{ quatre constantes} \end{cases}$$

Etudions le cas numérique suivant, correspondant sensiblement à la pompe centrifuge mise à notre disposition au Laboratoire de Mécanique et nous étudierons successivement en prenant comme unités le kilogramme, le mètre, la seconde.

- α)* Le tracé de la méridienne de la pompe.
- β)* Le tracé des aubes, en projection horizontale.
- γ)* Le tracé de la périphérie du distributeur.

$\alpha)$ *Tracé de la Méridienne de la Pompe.* — Son équation est

$$z = -\frac{D_2}{4a^2} + \frac{D_3}{r^2} + \frac{D_5}{2Ka^2} \frac{e^{-Kar^2}}{r^2}$$

Dans cette équation nous connaissons déjà les constantes K et a . En effet on a :

$$\begin{cases} K = \frac{\rho}{2\eta} = 50.000 \\ \alpha = -\frac{R_2 \cos \varphi_2}{r_2} = -\frac{6,40 \times 0,21}{0,14} = -9,60 \end{cases}$$

Remarquons dès maintenant que le produit Kar^2 est négatif et a comme valeur pour $r = 0,20$

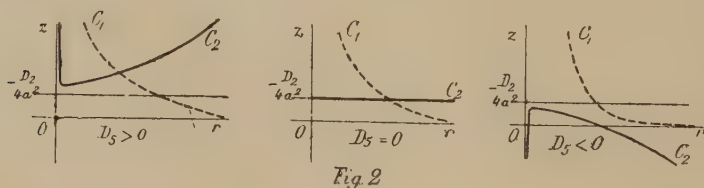
$$Kar^2 = -27648$$

C'est donc un nombre élevé.

Dans l'équation de la méridienne restent donc arbitraires 3 coefficients : D_2 , D_3 , D_5 . On peut considérer l'équation de la méridienne comme formée de la somme de 2 équations.

$$\begin{cases} z_1 = \frac{D_3}{r^2} \\ z_2 = -\frac{D_2}{4a^2} + \frac{D_5}{2a} \frac{e^{-Kar^2}}{r^2} \end{cases}$$

la 1^{re} équation représente une courbe c_1 , asymptote à oz et à



or. La 2^e équation représente une courbe ayant schématiquement la forme ci-contre, suivant les valeurs de D_5 .

On peut disposer des 2 constantes D_2 et D_5 de telle sorte que pour $r = r_3$ la courbe c_3 passe par le point d'ordonnée $z = e$ et qu'elle y ait une tangente déterminée par exemple, passant par un point fixe de *or* : A. On peut alors, pour un calcul rapide remplacer la courbe C_2 par deux droites, l'une joignant l'origine au point $\left(r_3, \frac{e}{6}\right)$ et par sa tangente au point (r_3, e) .

On peut disposer de la constante D_8 pue contient l'équation de la courbe C_1 de manière à ce que cette courbe passe par le point $\left(r_3, \frac{e}{2}\right)$. On a alors

$$D_8 = r_3^2 \times \frac{e}{2}$$

En utilisant ces représentations simplifiées on obtient le tableau suivant qui va nous permettre de tracer rapidement les 2 courbes Δ et Δ_2 formant la méridienne de la pompe.

$\Delta_1 : e_1 = 0,036$		$\Delta : e = \frac{e_1 + e_2}{2} = 0,018$	$\Delta_2 : e_2 = 0,004$
$r = 0,01$	$z = 6,900$	$z =$	$z = 0,650$
0,04	0,474	0,273	0,042
0,08	0,118	0,053	0,010
0,12	0,052	0,023	0,005
0,16	0,028	0,017	0,003
0,20	0,020	0,013	0,003
0,24	0,037	0,012	0,002
0,28	0,058	0,005	- 0,020
0,32	0,078	0,003	- 0,044

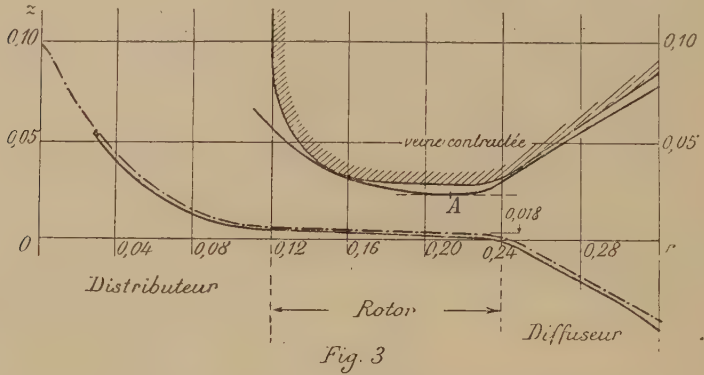
Nous avons pris

$$r_3 = 0,24$$

et comme coordonnées de A.

$$\left(r_3 - \frac{e_2 - e_1 \sqrt{3}}{2}, \frac{e_1 + e_2}{2}\right) \text{ ou } (0,229, 0,022)$$

Nous obtenons les filets liquides ci-contre à échelle moitié. Nous avons représenté en traits mixtes à la même échelle les profils réellement exécutés. Ce sont des profils analogues.



On met en évidence une contraction de la veine, qui ici, au lieu d'utiliser l'épaisseur totale du rotor soit 24 mm. n'en utilise qu'une partie. 18 mm. environ ayant ainsi un coefficient de contraction de $\frac{24-18}{24} = 25\%$ environ. Nous ne retiendrons de ce calcul que l'indication de l'existence d'un coefficient de contraction qui peut atteindre 25 %.

5) *Tracé des aubes en projection horizontale.* — Le profil des aubes est donné dans ce cas par la relation non particularisée puisque les aubes ne viennent pas jusqu'à l'origine :

$$\theta - \theta_0 = \frac{D_6}{2Ka^2} \int_{r_2}^r \frac{e^{-Kar^2} - 1}{r^2} \cdot \frac{dr}{r}$$

ou encore en supposant $\theta_0 = 0$.

$$\theta = \frac{D_6}{2Ka^2} \int_{r_2}^{r_3} \frac{e^{-Kar^2} - 1}{r^2} \cdot \frac{dr}{r}$$

Déterminons D_6 de telle sorte que pour $r = r_3$ on ait $\theta = \theta_3$.
On aura donc

$$\theta_3 = \frac{D_6}{2Ka^2} \int_{r_2}^{r_3} \frac{e^{-Kar^2} - 1}{r^2} \frac{dr}{r}$$

Nous supposons, en remarquant que nous pouvons écrire approximativement :

$$\frac{D_6}{2Ka^2} \int_{r_2}^r \frac{e^{-Kar^2} - 1}{r^2} \frac{dr}{r} = \frac{r - r_2}{r_3 - r_2} \left(\theta_3 - \frac{\omega}{a} \operatorname{Lg} \frac{r_3}{r_2} \right)$$

on a donc :

$$\theta = \frac{r - r_2}{r_3 - r_2} \left(\theta_3 - \frac{\omega}{a} \operatorname{Log} \frac{r_3}{r_2} \right)$$

En prenant :

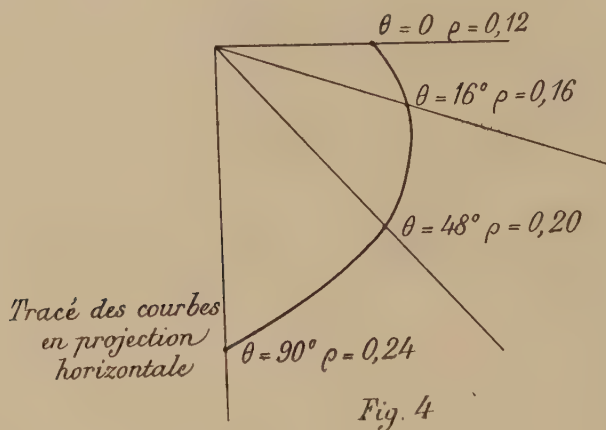
$$\left\{ \begin{array}{l} r_2 = 0,12 \\ r_3 = 0,24 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = 0 \\ \theta_3 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

On obtient les résultats numériques suivants :

$r = r_2 = 0,12$	$\theta = 0$
0,16	16°
0,20	48°
0,24	90°

Ces résultats comparés au tracé exact de l'aube sont donnés par le croquis ci-dessous.

On trouve ainsi un profil analogue au profil réalisé. Quelques différences sont à signaler : La forme générale est bonne, mais les aubes réalisées sont plus voisines de la corde.



γ) *Tracé de la périphérie du Distributeur.* — Remarquons que la vitesse radiale est :

$$R \cos \varphi = - dr$$

et que la vitesse de rotation a été prise constante et égale à ω . A l'origine des temps le liquide se trouve sensiblement sur la verticale passant par le point $r = r_3 = 0,24$ $\theta = 0$, à l'instant t elle se trouve au point de distance polaire $\rho = r_3 e^{-at}$. Elle a, d'autre part, tourné d'un angle $\theta = \omega t$. Si bien que ses coordonnées polaires ρ et θ sont en fonction du temps et rapportés à des axes fixes

$$\begin{cases} \rho = r_3 e^{-at} \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

l'élimination de t donne :

$$\rho = r_3 e^{-a \frac{\theta}{\omega}}$$

En prenant pour r_3 non pas 0,24, mais 0,24 augmenté d'une certaine longueur destinée à prouver le jeu nécessaire entre le rotor et le stator on a la relation

$$\rho = 0,245 e^{0,218 \theta}$$

Mais pour établir cette formule nous avons supposé que la nappe liquide avait l'épaisseur qu'elle possède à la sortie du rotor, parce que nous avons supposé que la vitesse ω était nulle. En réalité le liquide se répand dans la volute entière si on tient compte de ce mouvement on peut supposer que le liquide forme une nappe dont le volume est équivalent au volume de la nappe ainsi définie. On obtient alors les valeurs suivantes de ρ .

$\theta = 0$	$\rho = 0,245$
90°	$0,275$
180°	$0,314$
270°	$0,357$
360°	$0,385$

Les résultats sont indiqués sur le graphique ci-dessous, à l'échelle de 1/4.

b) Calculs numériques à la Deuxième Distribution et Vérifications Expérimentales. — Les calculs numériques effectués précédemment nous ont permis de retrouver les formes d'ensemble des pompes actuelles et ont mis en évidence le phénomène de contraction de la veine liquide. On ne peut, dans le cas de la deuxième Distribution conduire les calculs numériques de la

même manière car on ne dispose plus d'un nombre fini de coefficients mais d'un nombre infini. Il est certain qu'en prenant un nombre convenable de coefficients on pourrait arriver

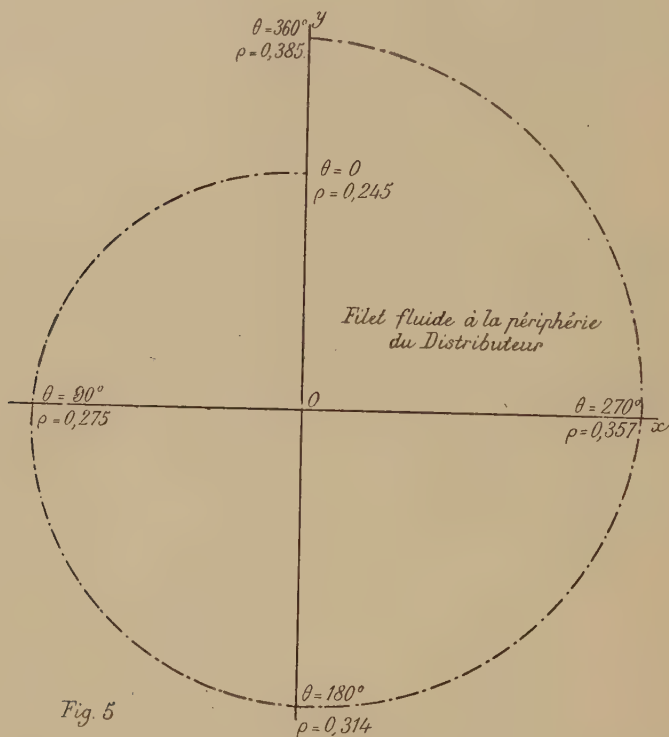


Fig. 5

à retrouver les profils usuels qui d'ailleurs sont assez voisins des trajectoires moyennes déjà étudiées.

Si donc nous voulons exécuter des calculs numériques et effectuer des vérifications expérimentales sur cette deuxième distribution nous devons mettre en évidence des propriétés ne nécessitant aucune particularisation de l'infinité des coefficients b . Nous allons tout d'abord vérifier que les formules proposées cadrent bien avec deux résultats expérimentaux jusqu'ici inexpliqués.

Phénomène de déflexion : Le phénomène de déflexion ne peut pas être mis en évidence par une étude directe puisqu'on ne possède pas le moyen d'étudier la distribution moyenne des vitesses dans une pompe. Mais on peut la calculer indirectement par la puissance. D'une part on peut mesurer la puissance absorbée par une pompe, à l'aide d'une dynamo dynamométrique. D'autre part on peut la calculer par la relation d'Euler qui porte sur le produit $UV_m \cos \alpha$, en désignant par α l'angle de la vitesse moyenne V_m avec la vitesse d'entraînement U . Ces calculs sont développés plus loin aux vérifications expérimentales. On peut donc ainsi calculer l'angle φ_m . Comme d'autre part on admet que le long de l'aube la vitesse est tangente à celle-ci, on connaît l'angle φ_o , on peut donc calculer expérimentalement la valeur de la déflexion, $\varphi_m - \varphi_o$ qui est de l'ordre d'une dizaine de degrés pour les pompes usuelles et atteint 75° pour les pompes à aubes normales à la périphérie du rotor.

L'expression de $(\lg \varphi_m - \lg \varphi_o)$ que nous avons obtenue précédemment dépend du coefficient K_o qui est l'accélération parallèle à l'axe de la pompe, du liquide manipulé. Les théories hydrauliques usuelles, même modifiées et surchargées d'hypothèses supplémentaires pour tenir compte du nombre des aubes, ne font jamais entrer en ligne de compte la vitesse de l'eau normale au plan de sortie du rotor.

Nous verrons aux vérifications expérimentales, étude de la Déflexion, que les résultats expérimentaux font apparaître la nécessité de faire intervenir le phénomène de contraction de la veine. En quoi consiste celui-ci ?

Contraction de la veine : Nous avons vu précédemment que deux filets liquides correspondant aux mêmes valeurs de r et θ ne peuvent être parallèles entre eux en un nombre infini de points. Or le tracé usuel des pompes que nous avons étudiées

comporte dans le tracé de la méridienne de la pompe deux arcs parallèles. Il y a donc, au point de vue mathématique un décollement de la veine et on peut admettre que ce décollement se fait dans le même sens que celui que nous avons trouvé lors de l'étude de la deuxième distribution.

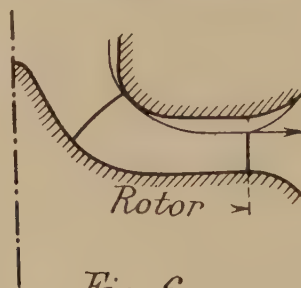


Fig. 6

La contraction de la veine est d'ailleurs en accord avec de très nombreux résultats expérimentaux trouvés, non dans l'étude des pompes, mais dans l'étude des orifices, des vannes et des ajutages. Citons rapidement d'après « l'Hydraulique Générale et appliquée » de M. Eydoux les principaux résultats :
où λ représente le coefficient de débit.

Orifices rectangulaires en mince paroi	$0.59 \lambda < 0.63$
Orifices rectangulaires en paroi épaisse	λ assez voisin de 1
Vanne verticale rectangulaire mince paroi . . .	$\lambda = 0.70$
Vanne inclinée $1/2$	$\lambda = 0.74$
Vanne inclinée $1/2$	$\lambda = 0.80$
Venture	$\lambda = 0.82$
Ajustage veine moulée	$\lambda = 0.98$

les coefficients de débit que nous avons utilisés sont compris entre 0,70 et 0,85, ils sont donc tout à fait comparables aux coefficients de débit des vannes.

Une remarque est utile : ce que nous avons cherché c'est la vitesse du liquide à la sortie du rotor. Nous avons supposé que

le minimum de la veine était atteint sur cette périphérie du rotor. En réalité il est possible que le minimum d'épaisseur de la veine soit atteint avant ou après la périphérie du rotor. Etant donnée cette incertitude nous avons considérée le coefficient de débit comme un paramètre à déterminer en second lieu, après la détermination de la déflexion ($\varphi_m - \varphi_0$) et les vérifications expérimentales sont satisfaisantes parce que, en particulier, pour des pompes de même série, le coefficient de contraction et le coefficient de déflexion ont les mêmes valeurs.

Une autre remarque : On aurait pu ne pas tenir compte de la contraction de la veine et se contenter de la déflexion pour compenser les résultats. Nous ne l'avons pas fait parce que le tracé du rotor des pompes étudiées met en évidence la nécessité d'un décollement de la veine et parce que l'expérience a montré que des zones d'eaux mortes existaient fréquemment à l'intérieur des pompes. L'usure de celles-ci est souvent répartie en des zones bien définies (zones de tourbillons) alors que d'autres zones restent intactes (zones d'eaux mortes).

Mais cette question de la contraction est une question particulière aux pompes actuellement en usage, tandis que le phénomène de déflexion est général. D'ailleurs il n'est pas possible d'expliquer la différence entre la puissance calculée et la puissance mesurée par le phénomène de contraction seul. En particulier, ainsi que l'a remarqué M. Bergeron, dans le cas des aubes radiales l'emploi du seul coefficient de contraction ne peut expliquer les différences constatées.

Les études de ces deux phénomènes : Déflexion et contraction doivent donc se poursuivre simultanément.

Phénomène de Prérotation. — Ainsi que nous l'avons vu le phénomène de prérotation est causé par la discontinuité entre la distribution des vitesses dans le tuyau cylindrique d'amenée et par la distribution de la deuxième famille.

La vitesse ω est donnée par la relation

$$\omega = K_0 z + K_1$$

Si nous prenons comme plan *xy* le plan médian du rotor nous aurons pour dans ce plan sensiblement $\omega = 0$ et par conséquent $K_1 = 0$. Nous avons trouvé précédemment la relation

$$\lg \varphi_m = \frac{2 h_0}{K_0 r^2}$$

c) **Vérifications expérimentales.** — Nous rapporterons les vérifications expérimentales à l'étude de la deuxième distribution.

La *première vérification* portera sur l'étude de la différence entre la puissance calculée et la puissance mesurée. Nous expliquerons ces différences en faisant intervenir deux éléments : la contraction de la veine et la déflexion, ces deux phénomènes étant mis en évidence par l'étude de la deuxième distribution. La vérification résultera de ce que, pour des pompes très différentes : centrifuges, hélicoïdo-centrifuges, à une ouverture, à deux ouvertures, à aubes inclinées ou normales à la périphérie du rotor, les différences seront expliquées à moins de 5 % près, par un coefficient de contraction et par une déflexion de comparables. Cet accord est particulièrement bon pour les pompes appartenant aux mêmes séries de construction.

La *deuxième vérification* portera sur l'observation directe du phénomène de prérotation.

Différence entre la Puissance calculée et la Puissance mesurée.
— Le travail précédent a été conduit pour pouvoir répondre à cette question : Comment se fait-il que la Puissance calculée soit toujours notablement supérieure à la Puissance mesurée ?

Les études précédentes nous ont montré que les théories

hydrodynamiques conduisaient à des résultats vraisemblables. Ces théories mettent en évidence que le résultat déjà observé et encore inexpliqué pouvait être causées par une double phénomène :

une contraction de la veine liquide à l'intérieur du rotor.

une inclinaison de la vitesse moyenne sur la vitesse à l'aube.

Les vérifications expérimentales ont été faites sur 50 essais industriels, effectués à Chartres, dans le laboratoire d'essai de la maison Gourdin, sur des pompes diverses, en particulier des pompes Bergeron. Ces essais ont mis en évidence les faits suivants :

Pour des pompes de puissance supérieure à 1 ch.v et de rendement supérieur à 60 % il y a toujours une différence notable entre la puissance calculée et la puissance réalisée. En rapportant cette différence à la puissance calculée on met en évidence une différence relative d'environ 30 %.

Pour calculer cette différence nous avons employé le procédé suivant :

La puissance calculée est en kgm sec :

$$P_{calc} = \frac{Q + \delta Q}{g} (uv \cos \alpha)$$

en désignant par :

Q, le débit en litre par secondes. δQ les pertes en eau prises égales à 2 %.

g, l'accélération de la pesanteur (9 m. 81), u la vitesse d'entraînement.

v, la vitesse absolue, α l'angle de u et de v.

La puissance mesurée est en kgm sec.

$$P_{mes} = P_f - (P_M + P_E)$$

P_f est la puissance fournie par le moteur à la pompe.

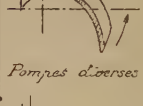
P_m la puissance absorbée par les frottements mécaniques, calculée par une formule semi-empirique due à M. Bergeron.

P_e la puissance absorbée par les frottements des joues de la pompe, sur l'eau et sans effets utiles, estimée par une formule empirique due à M. Bergeron.

La précision des mesures a été estimée à 5 % avec une valeur absolue minima de $1/8$ de ch.v soit environ 10 kgm/sec.

Les valeurs prises correspondent toutes à des maxima de rendement.

Les résultats numériques sont consignés dans les tableaux suivants :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
D_a	19,4	5,90	151,8	120	5	66	33	160	43	52	1	25	80	Pompes hélicoïdales
D_b	27,7	7,70	149,7	225	5	66	38	185	50	60	1	30	90	
D_c	55,4	8,65	151,8	660	5	66	45	220	60	72	1	35	105	
D_d	72	19,20	151,8	1500	5	66	54	260	68	86	1	40	115	
D_e	55,4	3,10	47,1	220	5	66	74	355	95	120	1	50	145	
e_2	165,7	28	151,8	6125										
D_f	124,6	10,70	74,8	1725	5	66	86	415	106	135	1	60	170	
D_g	190	8,80	57,6	1950	5	66	100	490	126	160	1	70	200	
E_a	11,08	4,80	151,8	93,75	4	66	17	160	30	46	1	25	80	Pompes hélicoïdales
E_b	16,77	6,50	151,8	187,5	4	66	20	185	32	53	1	30	90	
E_c	27,7	11	151,8	472,5	4	66	24	220	42	62	1	35	105	
E_d	40,8	18,30	151,8	1042,5	5	66	28	260	48	75	1	40	115	
E_e	36,18	21,30	151,8	1497,5	5	66	33	300	56	85	1	45	130	
E_f	216,7	21	79,6	6150	5	66	63	575	102	170	1	80	230	
F_a	205	14,70	303,6	442	4	66	28	135	35	45	1	25	80	Pompes d'axes
F_b	13,83	10,75	298,3	307,5	6	66	19	120	26	42	1	25	13	
F_c	1,53	30	293,1	150	5	60	9	160	17	30	1	20	42	
F_{d_1}	1,11	4,80	146,6	16,50	5	60	5	140	14	20	1	15	20	
F_{d_2}	0,99	15	240,8	62,25										
F_e	20,40	8,50	153,9	285	5	64	16	210	35	60	2	45	140	
F_f	83,1	57,70	151,8	7050	6	70	20	445	50	120	2	80	160	
F_g	1,11	18	298,3	82,5	6	60	6	130	13	27	1	25	130	

Ce tableau montre que nous avons pris des pompes extrêmement variées allant, comme débit de 1 à 1.000 l./sec et comme hauteur de refoulement de 4 à 65 mètres. La diversité des angles φ_0 est également notable puisque φ_0 varie de 0° à 80° avec une majorité de pompes à 66° .

La comparaison entre la puissance calculée et la puissance mesurée se fait aisément à l'aide du tableau suivant :

Puissance calculée et Puissance mesurée

Pompe	Vitesse long 20	Vitesse normale	Vitesse relative	v_{cos-c}	$v_{vicos-c}$	Puissance calculée	Puissance fournie	Pertes mécan	Pertes frotts	Puissance nette	Différence	Différence relative	Observations
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
A_a	10,12	0,99	2,95	7,40	74,9	63,4	54,7	1,50	5,70	47,5	15,9	25%	Pompes de puissance faible ou de rendement médiocre Précision insuffisante
a_e	21,62	2,13	6,50	19,78	42,7	504	492	14,0	16,2	410	94	13	
A_b	17,76	3,11	6,22	42,38	22,0	1795	1350	22	15,2	4315	482	27	
A_c	20,4	3,73	7,58	13,48	2,69	3888	2025	40	18,8	4966	922	51	
A_d	17,53	1,66	3,32	14,68	2,57	1306	877	2,9	17	811	475	36	
d_e	19,40	1,36	3,72	16,18	3,14	1789	1200	33	18,8	1148	641	35	
A_e	35,53	2,15	6,25	23,71	993	2532	1650	431	86,3	4933	1089	43	
e_e	47,0	1,20	3,51	15,70	2,33	328	300	10	30,4	231	77	23	
A_f	31,32	0,42	0,58	30,92	968	247	442	83	16,2	343			
f_e	15,72	0,21	0,29	15,52	243	308	697	11	5,7	53			
A_g	16,70	0,25	0,61	16,14	2,69	605	975	17	5,7	75			
g_e	33,36	0,63	1,67	31,69	1099	593	810	105	14,2	639			
B_a	24,9	2,16	6,31	13,99	472	1066	952	27	32,4	893	179	16	
B_b	24,9	2,25	6,77	13,56	462	780	502	27	32,4	443	337	43	
B_c	27,5	2,40	7,00	21,03	578	2947	2310	45	2,6	249	768	26	
B_d	30,19	3,23	9,10	30,28	1188	6059	4575	215	12,95	4200	1059	30	
B_e	28,8	2,57	7,41	21,88	631	3862	3328	225	45,7	2857	1005	27	
B_f	21,23	1,63	9,37	5,13	344	1390	1275	120	67	1088	312	22	
B_g	14,04	1,73	5,51	8,25	126	923	525	7	15,2	503	420	45	
C_a	13,17	0,52	0,53	13,47	181	66,2	75	5,50	3,7	66	0	0	
a_e	44,51	0,953	0,963	44,51	210	85	90	8	4,0	78	7	11	
e_e	27,32	1,36	1,36	27,32	796	42,9	431	42	10,4	374	50	12	
C_b	16,76	1,31	1,31	16,76	231	242	255	16	5,7	233	9	5	
b_e	33,41	1,74	1,74	33,41	146	1274	1100	116	16,2	970	296	23	
C_c	16,20	1,90	1,90	16,20	420	466	495	44	5,7	447	49	5	
C_d	15,0	0,707	0,707	15,0	324	120	131	18	5,7	107	43	11	
d_e	34	1,09	1,09	34,0	1156	665	750	120	16,2	614	51	7	
C_e	22,77	0,789	0,789	22,77	513	360	408	72	5,7	330	30	9	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
D_α	12,14	1,30	3,20	9,32	112	2	120	2	5,7	112	110	50
D_b	13,77	1,39	3,41	10,68	167	416	225	6	15,2	204	210	48
D_c	16,70	1,38	4,45	12,64	211	1192	660	16	18,8	625	567	48
D_d	19,73	1,81	1,85	18,04	365	2679	1500	36	46	1448	1231	45
D_{e_1}	8,19	0,767	1,92	6,44	52,7	298	220	6	17,2	217	101	33
e_2	26,26	2,22	5,45	21,88	538	3957	6225	165	49	6011	3926	39
D_f	1552	1,23	3,01	12,77	198	2516	1725	47	58,5	1620	896	35
D_g	1416	1,37	3,36	11,09	157	2083	1950	53	76,7	1820	1163	39
E_a	12,4	1,44	3,54	8,91	108	122	03,7	1,7	5,7	86,3	35	29
E_b	13,96	1,60	3,93	10,37	145	248	187	8	15,2	164	84	33
E_c	16,70	1,86	4,57	12,53	209	589	472	16	18,8	437	152	26
E_d	19,73	1,98	4,87	15,45	305	1269	1042	35	46,2	961	308	24
E_e	22,78	1,29	3,17	19,99	453	1662	1497	74	61,4	1362	300	18
E_f	21,84	2,11	5,19	17,10	373	8240	6150	244	92	5814	2426	30
E_a	18,82	3,83	9,40	10,29	194	403	442	11	16,9	402	1	0
F_b	17,81	2,15	4,82	12,53	223	314	307	6	26,3	275	39	12
F_c	25,45	3,76	5,76	17,93	456	71	150	22	20,9	108		Pompe de puissance
F_d	20,20	0,555	1,11	9,30	95,4	108	16,15	1,50	1,5	13,5		faible ou de rendement
d_z	16,86	0,500	1,00	16,00	270	2700	62,25	7,25	3,0	52		médiocre
F_e	16,16	2,14	4,38	11,28	182	376	285	15	850	195	181	47
F_f	33,70	2,52	7,36	26,68	901	7631	7050	488	636	5936	1695	22
F_g	19,40	0,57	0,900	18,36	356	40	82,5	8,5	21	53		- d° -

De ces résultats bruts un premier fait est à dégager :

Les pompes de puissance faible, inférieure à 2 CV, et de rendement médiocre, inférieur à 60 %, ne semblent pas présenter l'anomalie faisant l'objet de ces recherches. La précision des mesures industrielles, l'importance relative des corrections dues au frottement du rotor sur l'eau, au frottement des paliers, tous ces motifs expliquent que le tableau précédent ne mette pas en valeur pour ces pompes, l'anomalie qui est mise en évi-

dence pour les pompes plus puissantes. Nous écarterons dorénavant ces pompes pour n'étudier que les autres.

Les pompes présentent entre la Puissance calculée et la Puissance réellement absorbée une différence qui peut aller jusqu'à 50 % de la puissance calculée. Aucune explication précise n'a été jusqu'à présent fournie. Nous allons essayer de représenter ce phénomène en introduisant deux conséquences des théories hydrodynamiques que nous avons précédemment développées.

Considérons donc le triangle de sortie OAE et désignant OA par u , la vitesse radiale, OE par v la vitesse absolue, l'angle

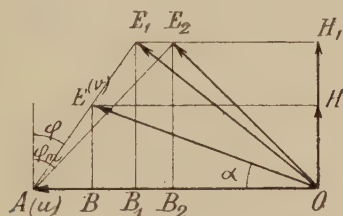


Fig 7

EOA par α , nous aurons en projetant E en B sur OA à étudier la variation relative de $OB \times OA$.

Remarquons que l'existence d'un phénomène de contraction de la veine liquide à la sortie du liquide se traduit par une augmentation de la vitesse normale OH qui devient $OH_1 = KOH$, le point E vient en E_1 , projeté en B_1 et la variation relative de $OB \times OA$ est alors $\frac{BB_1}{OB}$, qu'on démontre facilement être égale à $(K - 1) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi$, en désignant, suivant nos notations, par φ l'angle de la vitesse relative AE avec le rayon vecteur.

D'autre part nous avons vu que l'inclinaison de la vitesse moyenne φ_m sur le rayon, était supérieure à l'inclinaison de

la vitesse relative à l'aube. Supposons donc que le point E vienne en E₂, projeté en B₂. La variation relative du produit considéré est alors $\frac{B_1 B_2}{OB}$, qu'on démontre être égal à

$$Ktg \propto (tg \varphi_m - tg \varphi)$$

Si bien que la variation relative totale du produit considéré peut être pris égal à :

$$\eta = (k - 1) tg \propto tg \varphi + Ktg \propto (tg \varphi_m - tg \varphi) = tg \propto \{Ktg \varphi_m - tg \varphi\}$$

Dans cette expression quelle valeur donner à K ? Si nous considérons une section du rotor par un plan diamétral et si nous désignons par e et r l'épaisseur de la section libre du rotor et son rayon, par e' et r' l'épaisseur libre du rotor et le rayon correspondant, au point où les tangentes au profil supérieur et au profil inférieur font un angle de 45°, nous aurons comme section de sortie du fluide au lieu de $2\pi re$, la section contractée $2\pi r'e'\lambda$, en désignant par λ le coefficient de contraction, assez variable selon les auteurs, mais qui varie entre 0,70 et 0,80. On aura donc une augmentation de vitesse normale K, que l'on peut prendre

$$K = \frac{2\pi re}{2\pi r'e'\lambda} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{re}{r'e'}$$

K est donc un coefficient numérique défini par la construction même de la pompe. Il faut remarquer que ce coefficient K est variable entre des limites très étendues. Les constructeurs ne semblent pas rendre constant le rapport $\frac{r'e'}{re}$.

Remarquons que le raisonnement que nous avons fait supposer implicitement que la contraction maximum a lieu sur la périphérie du rotor.

Résultats

Pompe	Pompe	$\lg \infty$	$\lg q$	$\frac{\eta}{\rho} \frac{1}{\omega^2}$	λ	$q_m - q$	K	η_{calc}	η_{mes}	Δ	Observations
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
AC_{18}	A_{a_1}	0,097	2,475	0,798	0,80	5°	1,563	0,26	0,25	+0,01	
	a_2	0,098	2,475		0,85	5°	1,475	0,26	0,18	+0,05	
AG_{45}	A_b	0,175	1,732	0,877	0,80	5°	1,481	0,25	0,27	-0,02	
AH_{40}	A_c	0,199	1,732	0,742	0,80	5°	1,587	0,31	0,31	0,00	
AH_{49}	A_{d_1}	0,094	1,732	0,788	0,70	10°	1,813	0,31	0,36	-0,05	
	d_2	0,096	1,732		0,70	10°	1,818	0,31	0,35	-0,04	
BG_{11}	A_{e_1}	0,063	2,747	0,803	0,75	10°	1,661	0,44	0,43	-0,02	
	e_2	0,070	2,747		0,80	7°	1,661	0,28	0,25	+0,05	
BD_{18}	B_a	0,087	2,747	0,439	0,85	3°	1,340	0,14	0,16	-0,02	
BD_{11}	B_b	0,091	2,747	0,377	0,80	7°	1,661	0,40	0,43	-0,03	
BE_{32}	B_c	0,088	2,747	0,439	0,80	5°	1,425	0,22	0,26	-0,04	
BI_{30}	B_d	0,082	2,747	0,563	0,70	9°	1,316	0,33	0,30	0,03	
BM_{19}	B_e	0,088	2,747	0,430	0,80	5°	1,453	0,23	0,27	-0,04	
BN_{20}	B_f	0,079	5,671	0,492	0,85	2°	1,496	0,23	0,22	0,01	
SE_{80}	B_g	0,126	3,078	0,470	0,80	7°	1,530	0,47	0,45	0,02	
F_2	C_{a_2}	0,069	0	0,538	0,70	30°	2,809	0,11	0,11	0	
	a_3	0,050	0		0,70	40°	2,809	0,12	0,12	0	
F_3	C_{b_1}	0,078	0	0,908	0,70	30°	1,572	0,07	0,05	+0,02	
	b_2	0,052	0		0,70	65°	1,572	0,19	0,23	-0,04	
F_5	C_{d_1}	0,039	0	0,718	0,70	45°	1,990	0,08	0,11	-0,03	
	d_2	0,032	0		0,70	45°	1,990	0,06	0,07	-0,01	
F_6	C_e	0,034	0	0,530	0,70	45°	2,41	0,08	0,09	-0,01	
G_4	D_a	0,107	2,246	0,856	0,70	10°	1,630	0,48	0,50	-0,02	
G_5	D_b	0,100	2,246	0,857	0,70	10°	1,660	0,44	0,48	-0,04	
G_6	D_c	0,119	2,246	0,871	0,70	10°	1,642	0,51	0,48	+0,03	
G_7	D_d	0,092	2,246	0,832	0,70	10°	1,718	0,46	0,45	+0,01	
G_9	D_{e_1}	0,091	2,246	0,894	0,70	10°	1,600	0,38	0,33	+0,05	
	e_2	0,082	2,246		0,70	10°	1,600	0,34	0,39	-0,05	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
G_{10}	D_f	0,079	2,246	0,803	0,70	10°	1,780	0,38	0,35	+0,03	
G_{11}	D_g	0,097	2,246	0,822	0,70	10°	1,739	0,42	0,39	+0,03	
M_2	E_a	0,116	2,246	0,914	0,75	7°	1,316	0,27	0,29	-0,02	
M_3	E_b	0,114	2,246	0,916	0,75	7°	1,456	0,32	0,33	-0,01	
M_4	E_c	0,111	2,246	0,985	0,75	7°	1,353	0,27	0,26	+0,01	
M_5	E_d	0,100	2,246	0,987	0,75	7°	1,353	0,25	0,24	+0,01	
M_6	E_e	0,057	2,246	0,959	0,75	7°	1,341	0,15	0,18	-0,03	
M_{10}	E_f	0,100	2,246	0,956	0,75	7°	1,390	0,26	0,30	-0,04	
G_3	F_a	0,180	2,246	0,632	0,75	3°	1,414	0,17	0,12	+0,05	
F_{16s}	F_d	0,132	2,050	0,764	0,70	8°	1,821	0,46	0,47	-0,01	
$S_{6,9}$	F_c	0,075	2,747	1,24	0,70	9°	1,152	0,24	0,22	+0,02	

Pompes hélicoïdes

Nous voyons donc que, en prenant pour coefficient de débit un nombre compris entre 0,70 et 0,85, c'est-à-dire un nombre tout à fait acceptable et pour inclinaison de la vitesse moyenne sur la vitesse à l'aube, dans le cas où celle-ci est fortement inclinée, un angle variant de 5 à 10°, on obtient une compensation des résultats observés avec une erreur inférieure à 5 %.

Cette méthode, qui s'applique à des pompes extrêmement variées, conduit à des résultats acceptables.

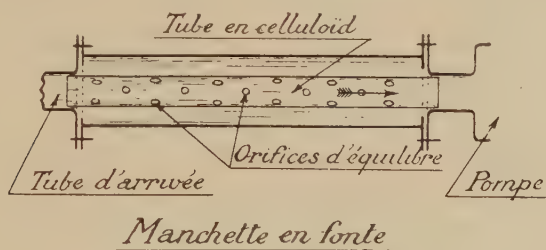
L'étude des groupes D et E, constituées par des pompes semblables, permet d'affecter à chacun de ces groupes deux valeurs de λ et de $\varphi_m - \varphi$, 0,70 et 10° pour le groupe D, 0,75 et 7° pour le groupe E. Les variations de γ qui s'étendent de 0,35 à 0,50 dans le premier cas et de 0,18 à 0,33 dans le deuxième cas sont fidèlement suivies et expliquées par les résultats numériques. Le bon accord entre les résultats mesurés et les résultats calculés est indépendant de la puissance et de la vitesse de rotation.

Dans le cas des pompes C, dont l'angle de sortie est $\varphi_0 = 0$, les angles trouvés sont très grands et surtout très variés. Ce

groupe de puissance d'ailleurs faible est de rendement médiocre. De plus les pales ne sont pas rectilignes et il est permis de se demander si la vitesse de l'eau est bien, à la sortie, normale à la périphérie.

Nous pouvons donc dire que dans l'ensemble les résultats prévus par la théorie hydrodynamique que nous avons exposée : Contraction de la veine et inclinaison de la vitesse moyenne, permettent d'expliquer les phénomènes constatés dans les essais industriels.

d) **Etude de la Prérotation.** — Nous avons monté le dispositif suivant : une manchette en fonte, de 1 mètre de longueur et de 0,20 m. de diamètre est pourvue d'une part de 2 brides permettant d'intercaler cette manchette sur le tuyau d'amenée d'une



pompe, et d'autre part de deux feuillures permettant de monter deux glaces de verre. Une feuille de celluloid s'enroule dans les brides d'amenée de la pompe et guide les filets liquides. Cette feuille est percée d'orifices permettant de créer de part et d'autre de cette feuille de celluloid l'égalité de pression. Le croquis schématique de cet appareil est donné ci-dessus.

On constitue ainsi une lance d'eau à faces parallèles, ayant à son intérieur un cylindre de même diamètre que le tube d'amenée.

Mettant en route la pompe à une certaine vitesse obtenue

par commande directe d'un moteur électrique, on laisse ouverte la vanne fermant le tuyau de décharge. L'eau est alors aspirée par la pompe et est animée d'un mouvement de translation. Ce mouvement est rendu facilement visible par l'injection dans le liquide d'un chapelet de bulles d'air. Celles-ci défilent à la partie supérieure du tube de celluloïd avec une vitesse sensiblement constante indépendante de la distance à l'axe.

Fermons la vanne de décharge en faisant ainsi travailler sous pression la pompe. Si la vanne est suffisamment fermée, on voit s'amorcer près de la pompe un mouvement de rotation. Ce mouvement se crée brusquement. Il est mis en évidence par le chapelet de bulles qui arrivées au même endroit quittent la génératrice brusquement sous un angle de 60° à 80° environ.

Fermons encore la vanne de décharge, l'origine du mouvement de rotation s'éloigne de la pompe, mais le phénomène reste constamment le même et se caractérise par un changement brusque de la distribution des vitesses.

Il est conforme aux équations du mouvement que nous avons écrites aussi bien, celles de la première famille que celles de la seconde : Il n'y a pas raccordement des distributions des vitesses entre le tuyau amont et la pompe.

Au point de vue mathématique nous mettons en évidence le phénomène suivant. Si nous désignons par D_1 la distribution des vitesses en un point M d'un tuyau AB, par D_2 la distribution en un point P du même tuyau. Les deux distributions D_1 et D_2 satisfont aux équations générales de l'hydrodynamique, mais elles peuvent ne pas se raccorder l'une à l'autre. Pourquoi ? Il semble qu'on ne puisse toujours passer d'une manière continue de la distribution D_1 à la distribution D_2 par des distributions intermédiaires de raccordant aux précédentes par des solutions des équations hydrodynamiques. Il y a alors

changement brusque. La distribution amont D_1 dépend non seulement des conditions D sur la surface terminale : Vitesse tangente à la paroi, mais encore des conditions initiales du mouvement en amont : ici de l'eau immobile dans la fosse. La distribution aval D_2 dépend encore des mêmes conditions à la paroi, mais encore du mouvement de l'eau en aval : ici de l'eau en rotation dans la pompe. En tous cas ce phénomène met en évidence l'influence de la viscosité.

Nous n'avons pu déterminer l'influence de ce phénomène sur le rendement et sur le phénomène de déflexion. Ce sera l'objet de recherches ultérieures.

CHAPITRE IV

CONCLUSION

Le procédé usuel de calcul des pompes centrifuges est une application des principes des méthodes hydrauliques, en particulier du théorème d'Euler. En dehors des hypothèses nécessaires sur la continuité du mouvement du liquide, on suppose que le phénomène étudié est entièrement de révolution autour de l'axe de la pompe et que le mouvement du liquide est le même dans toute l'épaisseur du rotor. On ne peut ainsi espérer faire apparaître l'influence du nombre des ailettes.

Ce procédé de calcul fondé sur ces hypothèses simplificatrices permet d'étudier les pompes usuelles, d'en tracer les formes générales et d'en déterminer *a priori* leurs courbes caractéristiques principales. Bien que vérifiées par une multitude d'expériences elle ne semblent être qu'une première approximation. Elles ne peuvent, en effet, expliquer tous les phénomènes constatés. L'inclinaison de la vitesse moyenne sur la vitesse à l'aube (phénomène de déflexion) nécessite l'introduction d'hypothèses supplémentaires. Celles-ci ne font d'ailleurs que masquer l'ignorance dans laquelle nous nous trouvons de la cause réelle de ce phénomène. Celui-ci cause pourtant une différence de plus de 30 % entre la puissance mesurée et la puissance calculée. De plus le mouvement de rotation de l'eau

dans le tuyau d'amenée (phénomènes de prérotation) est difficilement explicable par les théories hydrauliques usuelles.

La méthode hydraulique, perfectionnée depuis cinquante ans par les efforts successifs des ingénieurs, semble arrivée sensiblement à sa forme définitive. Comme elle ne peut fournir l'explication d'ensemble de tous les phénomènes constatés, il nous a semblé nécessaire de faire appel à la théorie hydrodynamique et de partir des équations de Navier.

Une première difficulté se présente : Ces équations portent sur les vitesses instantanées et le problème nous a paru, à l'heure actuelle, insoluble. Cette difficulté peut être levée en prenant la méthode de Boussinesq et en faisant porter les équations de Navier sur les vitesses moyennes dans le temps, en chaque point. Cette méthode nécessite d'ailleurs le remplacement du coefficient de viscosité de Poiseuille par un coefficient de viscosité particulier tenant compte de l'agitation locale, et considérablement plus grand que le précédent. La réussite des calculs de Boussinesq a montré que cette méthode était féconde. Nous nous sommes proposés de l'appliquer à l'étude des pompes centrifuges, comme deuxième approximation, la première étant l'étude hydraulique et la troisième étant l'étude des vitesses instantanées. Nous sommes donc partis des équations de Navier appliquées aux vitesses moyennes.

Une deuxième difficulté s'est présentée : Le choix d'une méthode d'étude : Que devons nous chercher ? Ou bien, nous pouvions, comme en hydraulique, diviser la pompe en 4 parties : Tube d'amenée, distributeur, rotor, diffuseur et chercher quatre distributions partielles satisfaisant chacune aux équations générales. Ces distributions satisfont de plus aux conditions aux limites et se raccordent entre elles, au moins quand aux vitesses sur les surfaces de séparation entre les différentes parties de la pompe. Ou bien nous pouvions chercher une solution

unique s'appliquant également aux 4 parties de la pompe et satisfaisant aux conditions à la paroi. Nous avons employé cette deuxième méthode pour des raisons d'ordre mathématique.

Restait à trouver une solution générale du système considéré s'appliquant aux pompes actuellement en service. Pouvions-nous espérer construire la solution générale de ce système aux Dérivées Partielles ? Outre qu'il est très difficile de reconnaître si une solution est une solution générale et naturellement, encore plus difficile de la former, nous avons pensé qu'il était nécessaire de commencer ces études par la mise en évidence de solutions particulières satisfaisant aux conditions aux limites que nous imposent les pompes actuelles. Suivant en cela l'exemple de Boussinesq nous avons précisé des hypothèses particulières de manière à transformer les équations aux Dérivées partielles en équations différentielles. Ces hypothèses sont es suivantes :

Les composantes radiales et tangentielles de la vitesse U et V sont des fonctions de r , distance à l'axe de rotation du point considéré et ω la vitesse parallèle à l'axe de la pompe, ne dépend que de r et de z . Ces hypothèses sont sensiblement comparables à celles de la théorie hydraulique : le phénomène est entièrement de révolution. Elles conduisent, ainsi que nous l'avons vu à des résultats numériques : formes du distributeur, du rotor, du diffuseur analogues à celles qui sont couramment réalisées. Mais si ces hypothèses permettent d'expliquer la prérotation, bien que la discontinuité entre le mouvement dans le tube d'amenée et dans le distributeur soit faible, elle ne permettent pas d'expliquer la déflexion. Ce sont des solutions particulières qui dépendent d'un nombre fini de constantes. Tout en étant en progrès sensible sur les théories hydrauliques, ces distributions particulières ne semblent pas susceptibles de représenter une distribution générale.

Mais on peut partir d'une hypothèse différente : Faire dépendre U et V , vitesses tangentielles et normales, non plus de la distance à l'axe r du point considéré, mais de ses coordonnées x et y . La vitesse ω devient alors une fonctions linéaire de z . Une telle hypothèse permet de représenter U et V par des séries trigonométriques mettant en évidence le nombre des axes du rotor. Ces fonctions dépendent d'un nombre infini de coefficients et permettent de représenter une distribution quelconque. Malheureusement nous manquons à l'heure actuelle de renseignements sur la distribution des vitesses moyennes et il semble peu commode de s'en procurer par une étude directe. Les photographies, en particulier, ne donnent de renseignements que sur les vitesses instantanées et non sur les vitesses moyennes.

Cette distribution permet, par contre, d'expliquer le phénomène de déflexion. En y joignant le phénomène de contraction dont le résultat est d'augmenter sensiblement la vitesse normale périphérique, on arrive à représenter fidèlement les résultats expérimentaux industriels. Cette distribution permet également d'expliquer le phénomène de prérotation. Nous pouvons donc dire que cette distribution, tout en gardant un caractère intéressant de généralité, permet de représenter d'une manière satisfaisante un ensemble de phénomène inexplicables par la théorie hydraulique ou par la première distribution. Mais ce caractère de généralité, tout en étant intéressant pour le développement ultérieur de ces théorie, ne permet pas d'explicitier numériquement les influences de la vitesse de rotation, de la forme de l'aube, etc.

Cette distribution permet, par contre, d'envisager la possibilité d'existence, à l'intérieur de la pompe, de zones d'eaux mortes, de zones d'usures particulièrement importantes.

Les résultats expérimentaux obtenus montrent que la mé-

thode hydrodynamique proposée conduit à des expressions permettant les calculs numériques relatifs aux pompes existantes, qu'elle explique convenablement l'ensemble des phénomènes observés et qu'elle permet de donner une explication scientifique de la déflexion et de la prérotation.

BIBLIOGRAPHIE

- 1^o KÆNIGS, *Leçons de cinématique.*
2^o BERGERON, *Hydraulique.*
3^o BRILLOUIN, *Leçons sur la viscosité des liquides.*
4^o HANOCQ, *Introduction aux Etudes expérimentales effectuées au Laboratoire
de Construction de Machines, Université de Liège.*
Pompes centrifuges à haute pression.
Etude théorique des pompes centrifuges.
Turbo-machines.
5^o LORENZ, *Nouvelle théorie et calcul des Roues Turbines.*
6^o RATEAU, *Bulletin de la Société Industrie minérale de St-Etienne*, 1892.
7^o RATEAU, EYDOUX, GABRIEL, *Turbines hydrauliques.*
8^o ZEUNER, *Théorie des Turbines.*
-

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTE

LA THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS
ET LES ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 20 Décembre 1929.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

Imprimerie Les Presses Modernes, 45, rue de Maubeuge, Paris.

Ateliers à Reims (Marne). — 4-6-1930.
